ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN
GRAZ

13. BAND 4. (SCHLUSS-)HEFT

MIT 23 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM SEPTEMBER 1960)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Acta Phys. Austr.

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca", Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen".

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerläßlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr.... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

13. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Adler, H. Zur Wirkung von Röntgen- und α-Bestrahlung auf verfärbtes Steinsalz 369

Krzywoblocki, M. Z. v. On the General Form of the Special Theory of Relativity 387

Whittenbury, C. G. and **M. Z. v. Krzywoblocki.** On Certain Fundamental Concepts of Classical and Quantum Kinetic Theory of Gases 395

Baumann, K. and **A. Höld.** On the Renormalization of Beta Coupling . . 473

Sexl, R. Über die Aufspaltung der Energieeigenwerte in einem Kristall und die Berechnung der Bindungsenergie 476

Hanke, Ingrid. Der Einfluß von Fehlstellen auf den chemischen Abbau von nachleuchtendem Kalzit 483

Urban, P. Bremsstrahlung in 2. BORNscher Näherung 496

Urban, P. Prof. C. J. BAKKER† 506

Buchbesprechungen 508

Zur Wirkung von Röntgen- und α-Bestrahlung auf verfärbtes Steinsalz

Von

Hans Adler

Institut für Radiumforschung der Österr. Akademie der Wissenschaften, Wien

Mit 8 Abbildungen

(*Eingegangen am 29. Juni 1959*)

Zusammenfassung

Es wird, zum Teil in Ergänzung der von anderer Seite durchgeführten Untersuchungen, gezeigt, daß die sekundären Färbungen des Steinsalzes (R-Zentren, Kolloide) gegen Röntgen- und α-Bestrahlung nicht stabil sind und sich unter der Einwirkung solcher Bestrahlung wieder in F-Zentren zurückverwandeln. Diese Umwandlung geht voraussichtlich, zumindest bei den Zentren, quantitativ und — jedenfalls bei hohen Zentrenkonzentrationen — wahrscheinlich nahezu verlustlos vor sich.

Bei additiv kolloidgefärbten Steinsalzkristallen wird ebenfalls ein teilweiser Abbau der Kolloide unter Röntgenbestrahlung beobachtet.

Mögliche Mechanismen der Umfärbung unter Bestrahlung werden diskutiert.

1. Einleitung

Über die primäre Verfärbung von Steinsalz und deren Verhalten unter dem Einfluß verschiedener physikalischer (Druck, Wärme, Licht) oder chemischer (Fremdstoffe im Kristall) Faktoren liegt eine große Anzahl von Untersuchungen vor [1]. Relativ wenig Beachtung hingegen scheint die Frage gefunden zu haben, wie sich eine sekundäre Färbung (zentrenbedingte Violettfärbung nach Bildung von R-Zentren aus F-Zentren durch Licht oder/und Wärme, Kolloidfärbung der natürlichen Blausalze oder nach additiver Färbung) gegen hochenergetische Strahlung verhält: K. Przibram und M. Belar [2] haben unter der Einwirkung von β-γ-Strahlen eines Radiumpräparats an verschiedenen Blau- und Violettsalzen gleichzeitig mit der Zunahme der Absorption im Blauen (Bildung von FZ.) eine Abnahme der Absorption im Roten und Gelben festgestellt; die Absorptionskurven konnten aber nur mit wenigen Meßpunkten belegt werden. Erst L. Wieninger [3] befaßte sich wieder mit der Wirkung von α-Bestrahlung auf natürliche verfärbte

Kristalle und fand an kolloidverfärbten Proben eine Abnahme der Kolloidbanden und — gegenüber einem farblosen Vergleichsstück — erhöhte Verfärbbarkeit in der F-Bande (in Übereinstimmung mit [2]), an zentrenverfärbten Violettsalzen jedoch im Gegensatz zu [2] praktisch indifferentes Verhalten.

Es seien daher im folgenden einige Untersuchungen mitgeteilt, die sich auf die Reaktion sekundärer Verfärbungen, insbesondere auf Röntgenbestrahlung, sowie auch auf die Wirkung von α-Bestrahlung auf die RZ. des Steinsalzes beziehen.

2. Das untersuchte Material

An violett *zentrenverfärbten* Proben wurden untersucht:

Sehr gut kristallisiertes, farbloses Salz aus Friedrichshall, mit α-Strahlen von Polonium verfärbt und bei 190° C (15 min) bis zur etwa optimalen R-Zentren-Konzentration umgefärbt.

Ein Blauumschlag nach Röntgenbestrahlung konnte nicht erzielt werden; bei den in vertretbaren Bestrahlungszeiten erreichten FZ.-Konzentrationen konnte bloß eine Graufärbung nach thermischer Behandlung beobachtet werden als Vorstufe zur Violettfärbung [4]. Daher konnte die Wirkung von Röntgenbestrahlung auf die R-Bande nur an natürlich violett gefärbtem Material studiert werden.

Natürlich violett gefärbtes Salz aus Heringen (Werragebiet). Das Handstück war sehr gut kristallisiert und wies eine einscharige, äußerst feine Streifung (dunkler blau) parallel (100) auf, war aber ansonsten sehr homogen gefärbt. Ultramikroskopischer Befund: Tyndallkegel sehr schwach, farblos, nur in den blauen Streifen etwas stärker, gelblich, aber nicht auflösbar.

An *kolloidverfärbten* Proben wurden untersucht:

Sehr stark blau verfärbtes Material aus dem Staßfurter Gebiet; gefärbte Gebiete inhomogen (wolkig), stellenweise mikroskopisch kleine Wassereinschlüsse, mindestens zweischarige Streifung parallel (110). Tyndallkegel sehr stark, rot-orange. Unter dem Polarisationsmikroskop zeigt sich eine schwache Doppelbrechung in der diagonalen Streifung; das Aufleuchten der Kolloide bei Einstellung der Streifung unter 45° gegen die Polarisationsebene in der Farbe ihres Streulichts zeigt Abweichung der Teilchen von der Kugelgestalt an.

Mäßig blau verfärbtes Material aus Heringen (Werragebiet), sehr homogen und gut kristallisiert. Tyndallkegel orange; die Analyse des Absorptionsspektrums läßt vermuten, daß neben der kolloidalen auch Zentrenverfärbung vorliegt.

Additiv nach der Methode von Rexer an Luft gefärbte Kristalle aus Friedrichshall (s. o.). Die Spaltplättchen wurden zur Erzielung einer möglichst einheitlichen Kolloidgröße einer passenden Wärmebehandlung über einer Gasflamme unterzogen.

Für Vergleichsproben wurde das o. a. Friedrichshaller Material benützt.

3. Versuchsanordnungen und Auswertemethoden

Als α-Quelle stand ein Poloniumpräparat von 20 600 el. st. E. zur Verfügung, das mit einer Glimmerfolie von 20 mm Luftäquivalent abgedeckt war. Die Bestrahlung wurde im Vakuum unter Lichtabschluß durchgeführt in ähnlicher Anordnung, wie sie in [5] beschrieben ist. Für den Abfall der Präparatstärke während der Versuchsdauer wurde korrigiert.

Die Röntgenbestrahlung wurde auf einer Therapieröhre mit Wolframanode, 100 kV_s, 4 mA, mit 3 mm Al-Filter bei Zimmertemperatur durchgeführt. Die Dosisleistung an der Kristalloberfläche betrug 21,5 rad/sec, die Halbwertstiefe 3,25 mm. Gelegentlich angewandte andere Bestrahlungsdaten werden gesondert angegeben.

Die Absorptionsspektren wurden mit Spiegel-Doppelmonochromator, Sb-Cs-Photozelle und einstufigem Elektrometerröhrenverstärker ausgemessen. Die Werte des Absorptionskoeffizienten sind definiert durch $k = 10 \cdot {}_{10}\log I_0/I$ und werden immer nach Abzug der Leerabsorption der entfärbten Probe oder eines farblosen Vergleichsstücks angegeben. Um Fehler durch oberflächliche Trübung der Proben bei längeren Versuchsreihen an ein und demselben Stück auszuschalten, wurde in solchen Fällen ein Vergleichskristall derselben Behandlung unterworfen und die Absorption gegen den Kontrollkristall gemessen.

Die Berechnung der Zentrenkonzentrationen wurde nach der Formel von A. Smakula [6] durchgeführt, und zwar

für die FZ.: $N_0 = 1{,}45 \cdot 10^{15}\, k_{max}/d$,

für die RZ.: $N_0 = 0{,}64 \cdot 10^{15}\, k_{max}/d$ (natürliche violette Kristalle, Halbwertsbreite = 80 nm),

$N_0 = 1{,}06 \cdot 10^{15}\, k_{max}/d$ (künstlich umgefärbte Proben, Halbwertsbreite = 132 nm),

für die MZ.: $N_0 = 0{,}31 \cdot 10^{15}\, k_{max}/d$

(N_0 [cm^{-3}], d [cm], k_{max} am Scheitel der Absorptionskurve gemessen).

Da sich in den Absorptionskurven gewöhnlich mehrere Banden überlagern, wurden jeweils die Differenzkurven gegen den vorhergehenden (oder Ausgangs-)Zustand gebildet und von diesen die genau — an einem Vergleichskristall — ausgemessene Kurve der primären (FZ.-)Verfärbung nach ähnlicher Vergrößerung oder Verkleinerung abgezogen, wodurch sich in mehr oder minder guter Annäherung die Veränderung in den übrigen Banden ergab.

Die Banden der (meist inhomogenen) Kolloide wurden unter Benützung der von M. Savostianova [7] angegebenen Kurven in ähnlicher Art analysiert, wobei zur Vereinfachung des Verfahrens eine kleine Anzahl (2 bis 4) diskreter Kolloidgrößen angenommen wurde.

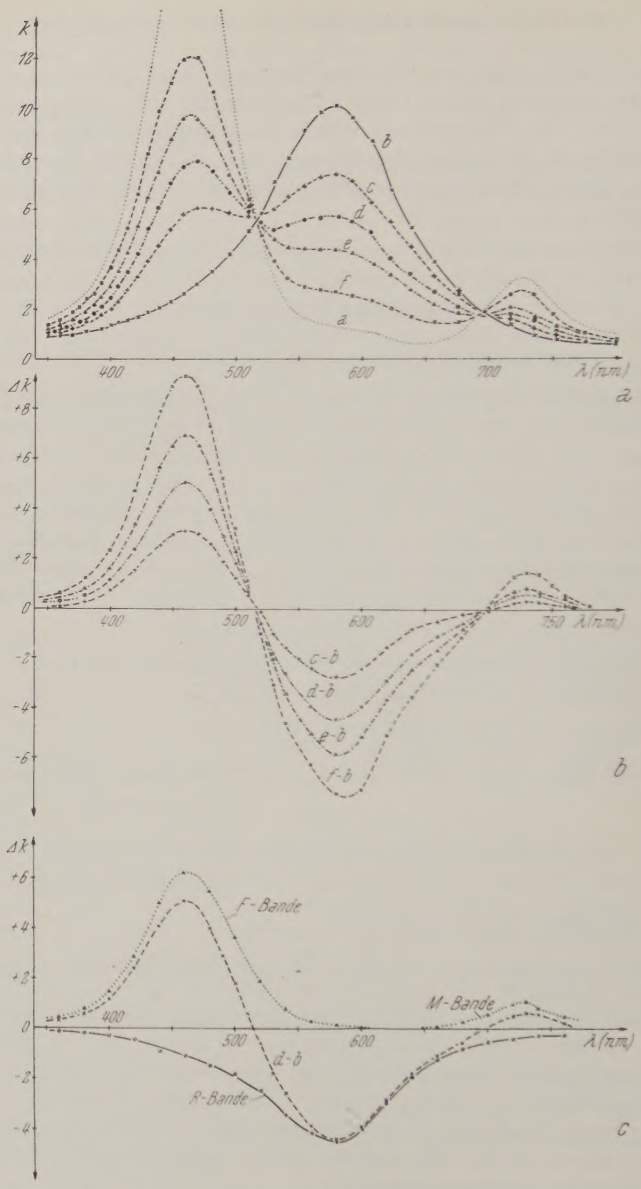

Abb. 1. Absorptionskurven des Kristalls aus Friedrichshall bei α-Bestrahlung
a) Kurve *a*: Ausgangszustand nach einer Woche Bestrahlung
Kurve *b*: nach thermischer Umfärbung
Kurve *c*: nach 1 Stunde Bestrahlung
Kurve *d*: nach 3 Stunden Bestrahlung
Kurve *e*: nach 7 Stunden Bestrahlung
Kurve *f*: nach 20 Stunden Bestrahlung
b) Differenzkurven
c) Auswertungsbeispiel

4. Die Versuche und ihre Ergebnisse

a) α-Bestrahlung künstlich violett gefärbter Kristalle

Abb 1 *a* zeigt die Absorptionskurven eines Kristalls nach Blauumschlag in verschiedenen Stadien der darauffolgenden Bestrahlung, Abb. 1 *b* die zugehörigen Differenzkurven und Abb. 1 *c* ein Beispiel der Kurvenanalyse.

Natürlich ist diese Analyse nicht frei von einer gewissen Willkür in der Annahme der maximalen Absorptionskoeffizienten, da es a priori nicht feststeht, ob die R-Bande bei ihrem Abbau geometrisch ähnlich bleibt; es erscheint jedoch plausibel, dies anzunehmen, da die *lang*wellige Flanke der R-Bande — die durch die F-Bande praktisch gar nicht und durch die M-Bande nur in ihrem letzten Ausläufer geringfügig verfälscht ist — zu sich selbst in allen Stadien weitgehend ähnlich bleibt und die *kurz*wellige Flanke bei einer viel geringeren Höhe der zu subtrahierenden F-Bande einerseits zu steil in die Abszissenachse einmünden, andrerseits einen zu scharfen Knick um 540 nm aufweisen würde. Der Fehler in der Bestimmung der Höhe der F-Bande dürfte nicht über (+ 0, − 10)% hinausgehen.

Man erkennt sofort, daß unter der Einwirkung der Bestrahlung die R-Bande ziemlich schnell abgebaut wird, unter asymptotischer Annäherung der Absorptionskurve an die Form nach Primärfärbung. Dies steht im Einklang mit den o. a. Beobachtungen von Przibram und Belar; daß Wieninger (l. c.) an natürlichen Violettsalzen den Effekt nicht erkennen konnte, liegt offenbar an der geringen Konzentration der RZ. in den damals untersuchten Proben und dem zu geringen, durch die α-Strahlen erfaßten Reaktionsvolumen.

Die „Zwischenzentren" bei 670 nm, die nach Wieninger und N. Adler [4] während der Umfärbung gelb → blau auftreten, konnten bei dem hier behandelten rückläufigen Prozeß nicht beobachtet werden, ebensowenig (mit obigen Einschränkungen) diejenigen bei 510 nm. Wenn die R-Bande aus mehreren Teilbanden zusammengesetzt ist ([1], S. 67)[1], so erscheint es auffällig, daß sich diese offenbar bei der Strahlungsentfärbung — ebenso wie bei der thermischen Entfärbung [4] — ziemlich gleichartig verhalten, soweit die obigen Vorbehalte diesen Schluß zulassen.

In Abb. 2 ist der Anstieg der Zentrenzahlen, berechnet nach den eingangs angegebenen Formeln, dargestellt; und zwar wurde, den von F. Seitz [8] vorgeschlagenen Modellen entsprechend und in Anlehnung an die Vorstellungen Wieningers [4], für die MZ. und die RZ. der doppelte Ordinatenmaßstab genommen: die beiden Zentren-Arten sollten je zwei Kationenlücken enthalten. Man erkennt, daß der Anstieg der FZ. bei der Umfärbung bedeutend steiler ist als der Erstanstieg; später verlaufen die beiden Kurven etwa parallel und scheinen sich,

[1] Dem entspräche auch die im Vergleich mit natürlichen RZ.-verfärbten Kristallen wesentlich größere Halbwertsbreite sowie die wiederholt festgestellte Abweichung von einer Glockenkurve um 610 nm.

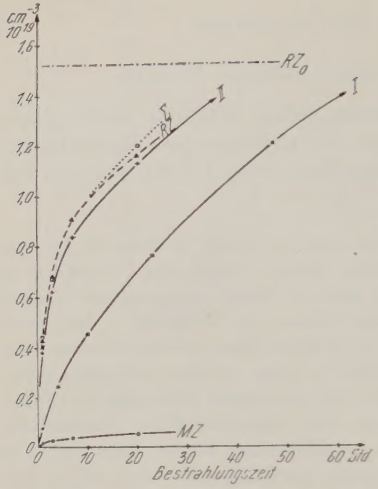

Abb. 2. Verfärbungsänderung des Kristalls nach Abb. 1

Kurve *I*: Erstanstieg der F-Bande
Kurve *II*: Zweitanstieg der F-Bande
Kurve *Σ*: Summe der Zunahme von *II* und *MZ*
Kurve *MZ*: Zunahme der M-Zentren } doppelter Maßstab!
Kurve *RZ*: Abnahme der R-Zentren } doppelter Maßstab!
Kurve RZ_0: R-Zentrenkonzentration im Zustand *b* } doppelter Maßstab!

bei sehr langen Bestrahlungszeiten, einander wieder zu nähern. Bemerkenswert erscheint, daß die Summe der in den neu gebildeten FZ. und MZ. enthaltenen Lücken anfangs nahezu gleich ist der Lückenzahl, die bei der Zerstörung der RZ. frei werden sollte; der Autor neigt zu der Ansicht, daß eine so gute Übereinstimmung nicht reiner Zufall sein dürfte. Nach den Seitzschen Vorstellungen würde das bedeuten, daß die RZ. praktisch quantitativ unter der Einwirkung der Bestrahlung wieder in FZ. (in geringem Maße auch in MZ.) zurückverwandelt werden, und während dieses Prozesses nur eine sehr geringe Anzahl FZ. aus dem Grundgitter neu entsteht.

b) Röntgenbestrahlung natürlich zentrenverfärbter Salze

Abb. 3 bringt, analog wie oben, die Absorptionsspektren.

Auch hier ist die Zerlegung der Kurven in gewissen Grenzen willkürlich, je nachdem man in der flachen Absorption unter 470 nm eine Veränderung mit der Bestrahlung annehmen will oder nicht. Es wurde eine geometrisch ähnliche Abnahme der R-Bande vorausgesetzt; bei Annahme der zweiten Version ändert sich an den Ergebnissen nichts Wesentliches.

Der Effekt der Abnahme der R-Bande ist, trotz der starken Entwicklung der F-Bande, sehr deutlich erkennbar. Die zweite Differenzkurve (nach Subtraktion der F-Bande) zeigt eine Verschiebung des Maximums im R-Gebiet um + 10 nm und eine Verminderung der Halbwertsbreite um 20 nm, sowie eine deutliche Unsymmetrie der Kurve; die langwellige Flanke bleibt gut proportional zur Ausgangskurve: entweder es wird nur der langwellige Teil der R-Bande gebleicht, oder es entwickelt sich neben der F-Bande noch eine zusätzliche Absorptionsstelle. Nochmalige Differenzbildung gegen die ursprüngliche Form der R-Bande ergibt eine solche Bande mit einem Maximum, das mit fortschreitender Bestrahlung gegen einen Grenzwert anwächst und sich dabei von 540 gegen 510 nm verschiebt. Ob diese Verschiebung reell ist, kann wegen der verminderten Meßgenauigkeit in der Flanke der starken F-Absorption nicht mit Sicherheit behauptet werden; es

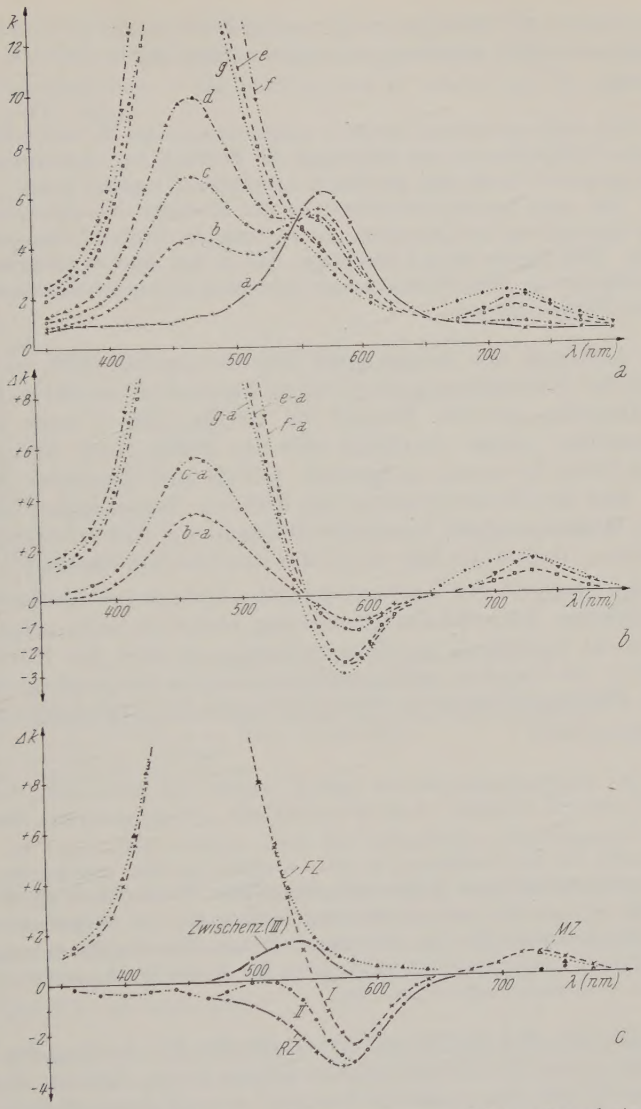

Abb. 3. Absorption des Kristalls aus Heringen (zentrenverfärbt) bei Röntgenbestrahlung

a) Kurve *a*: Ausgangszustand
Kurve *b*: nach $^1/_2$ Stunde Bestrahlung
Kurve *c*: nach $1^1/_2$ Stunden Bestrahlung
Kurve *d*: nach $3^1/_2$ Stunden Bestrahlung
Kurve *e*: nach 12 Stunden Bestrahlung
Kurve *f*: nach 22 Stunden Bestrahlung
Kurve *g*: Zustand *f* nach 7 Jahren Dunkelreaktion
b) Differenzkurven
c) Auswertungsbeispiel zu Zustand *e*

Kurve *I*: erste Differenz *e* minus *a*
Kurve *II*: zweite Differenz nach Abzug der F- und M-Bande von *I*
Kurve *III*: dritte Differenz nach Abzug der R-Bande von *II* (Zwischenzentren)

scheint sich um die Zwischenzentren nach Wieninger (l. c.) zu handeln, möglicherweise tritt daneben noch eine zweite Bande (bei 540 nm) zeitweise auf.

Die dritte Differenzbildung wurde so vorgenommen, daß die langwellige Flanke der zweiten Differenzkurve mit derjenigen der R-Bande im Ausgangszustand zur Deckung gebracht wurde und die Bande proportional ergänzt wurde.

N.B. Die oben beschriebene Streifung der Kristalle war bereits nach halbstündiger Bestrahlung verschwunden, die Färbung der Proben in diesem Stadium rotviolett. Dies könnte darauf hindeuten, daß in den stärker gestörten Streifen auch die Entfärbung (bzw. Rückfärbung) unter Bestrahlung schneller vor sich geht als in den übrigen Partien.

Das Auftreten von langwelligen Zwischenzentren (670 nm) konnte während der Bestrahlungsperiode nicht beobachtet werden. Bei einer Kontrollmessung an dem Kristall Nr. 23 der Abb. 3 nach 7 Jahren Dunkelreaktion wurde unterhalb 630 nm außer einer Abnahme der F-Bande keine Änderung festgestellt, jedoch eine Zunahme im Gebiet der MZ. und der Zwischenzentren um 670 nm. Insbesondere die (innerhalb der Meßgenauigkeit) konstante Differenz um 510 nm spricht gegen die Annahme, daß es sich hier um F'-Zentren handeln könnte ([1], S. 68).

Da ein Vergleich des Anstiegs der FZ. (Abb. 4) bei Erstbestrahlung mit demjenigen während der Umfärbung natürlich nicht möglich war, wurde je ein Spaltstück im Naturzustand und nach der Rückfärbung bei 230° C, 10 Stunden, völlig entfärbt und als Vergleichsproben verwendet. Daneben ist noch die Anstiegskurve des Kristalls aus Friedrichshall eingezeichnet.

N.B. Die Absorptionskurven der Abb. 3 wurden mit Bestrahlung bei 70 kV_s, 4 mA, 0,5 mm Al, erhalten; Abb. 4 bezieht sich auf die genormte Bestrahlung (Abschn. 3).

Die Kurve für die Umfärbung in Abb. 4 mußte an drei verschiedenen Spaltstücken desselben Kristalls aufgenommen werden. Soweit sich die Teilkurven überlappen, ist eine nur geringe Streuung festzustellen. — Wegen der oben erwähnten Willkürlichkeit in der Zerlegung der Absorptionsspektren wurden hier nur die Grenzen eingetragen, innerhalb derer die Kurve bei Analysen unter verschiedenen Voraussetzungen liegen muß.

Es zeigt sich, daß sämtliche Kurven für den FZ.-Anstieg des Violettsalzes über denen des Friedrichshaller Stücks liegen (höherer Störgrad). Die Kurve *II* für den zusätzlich bestrahlten und dann entfärbten Vergleichskristall liegt deutlich höher als diejenige des bloß entfärbten (*I*), was im Einklang mit den bekannten Tatsachen als Erhöhung des Störgrads durch die Bestrahlung zu deuten ist, die durch die Wärmebehandlung nicht völlig rückgängig gemacht wurde. Kurve *III* für die Umfärbung liegt anfangs etwa auf Kurve *II* und nähert sich später der Kurve *I*.

Die Anzahl der aus den zerstörten RZ. verfügbaren Lücken wurde analog wie in Abb. 2 eingetragen (*V*). Wegen der im Vergleich mit a)

weniger durchsichtigen Verhältnisse wurde keine Störstellenbilanz aufgestellt. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß — zumindest in den Anfangsstadien — die Summe aus *II'* und *I'* gut in den Bereich der Kurve *III* fällt.

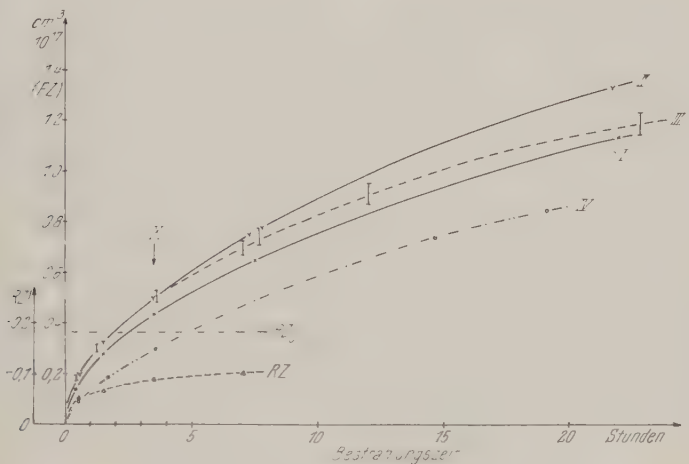

Abb. 4. Verfärbungsänderung des Kristalls nach Abb. 3

Kurve *I*: Anstieg der F-Bande des thermisch entfärbten Kristalls
Kurve *II*: Anstieg der F-Bande des vor der Entfärbung bis zum Punkt *X* bestrahlten Kristalls
Kurve *III*: mittlerer Anstieg der F-Bande bei der Umfärbung durch Bestrahlung
Kurve *IV*: Anstieg der F-Bande des Friedrichshaller Stücks
Kurve *RZ*: Abnahme der R-Zentren
Kurve RZ_0: Ausgangswert der R-Zentren

c) *Eine Beobachtung über die thermische Entfärbung*

Die folgende Beobachtung zeigt, daß auch in strahlungsverfärbten Kristallen, ebenso wie in additiv gefärbten, eine thermische Rückverwandlung der RZ. in FZ. möglich ist und die Entfärbung zumindest bei höheren Temperaturen auf dem Wege über die Bildung von Zwischenzentren und FZ. vor sich geht:

Wird in einem violetten Kristall ein steiler Temperaturgradient durch einseitiges Anheizen mit einer Gasflamme erzeugt, so schließen sich an den kühlen violetten Bereich schmale Zonen mit der Farbfolge grau-orangegelb-farblos in Richtung zur Heizzone an.

Der Vorgang konnte mit den verfügbaren Mitteln nicht messend verfolgt werden, da er bei den zur Rückfärbung nötigen höheren Temperaturen zu schnell abläuft.

d) *Röntgenbestrahlung natürlich kolloidgefärbter Kristalle*

Abb. 5 *a* bis *c* bringt die Absorptionsspektren, die Differenzkurven gegen den Ausgangszustand und ein Beispiel der Analyse der Differenzen eines stark verfärbten Staßfurter Blausalzes.

Da bei Normalbestrahlung die Änderungen in den Absorptionsspektren relativ geringfügig waren (Kurven *b* und *c*), wurde bei *d* und *e* die Dosisleistung durch Ausschaltung des Al-Filters (Oberflächendosis 200 rad/sec, Halbwertsschicht 0,6 mm) und bei *f* durch Benützung einer Feinstrukturröhre ($\approx 10^4$ rad/sec, $< 0{,}1$ mm) erhöht.

Die Abnahme der Absorption im langwelligen Bereich der Kolloidbanden ist deutlich, ebenso die Zunahme im kurzwelligen Bereich. Letztere dürfte vorwiegend von kleineren Kolloiden verursacht sein, die beim Abbau der größeren Teilchen entstehen; die Analyse der Kurven zeigt, daß höchstens ein geringer Teil auf die Bildung von R-Zentren zurückgehen kann. Bei der beschriebenen Labilität der RZ. gegen Bestrahlung wäre, außer in gepreßten Kristallen [9], [10], auch keine nennenswerte Bildung von RZ. zu erwarten gewesen. Das Ergebnis steht in qualitativem Einklang mit [2] und [3].

Infolge der sehr dichten Verfärbung konnte eine Änderung im Tyndallkegel nicht beobachtet werden. Die Berechnung der beim Abbau der Kolloide freiwerdenden Natriumatome (die als FZ. aufscheinen müßten) ist unsicher, da die Teilchen sicher von der Kugelgestalt abweichen[2]. Unter der Voraussetzung nur geringer Deformation der Kolloide ergeben sich die Zahlen der Tab. 1; die Bildung von FZ. im

Tabelle 1

Zustand	Abnahme der Na-Konzentration in den Kolloiden		Zunahme der FZ.	Überschuß an FZ.	
	absolut cm^{-3}	relativ %	cm^{-3}	absolut cm^{-3}	relativ
b	$0{,}20 \cdot 10^{17}$	$\approx$ 1,8	$\approx 0{,}40 \cdot 10^{17}$	$0{,}2 \cdot 10^{17}$	2,0
c	$0{,}48 \cdot 10^{17}$	$\approx$ 4,2	$\approx 0{,}80 \cdot 10^{17}$	$0{,}3 \cdot 10^{17}$	1,7
d	$0{,}57 \cdot 10^{17}$	$\approx$ 5,0	$1{,}85 \cdot 10^{17}$	$1{,}3 \cdot 10^{17}$	3,2
e	$0{,}65 \cdot 10^{17}$	$\approx$ 5,7	$2{,}45 \cdot 10^{17}$	$1{,}8 \cdot 10^{17}$	2,8
f	$2{,}14 \cdot 10^{17}$	$\approx$ 18,5	$6{,}3 \cdot 10^{17}$	$4{,}2 \cdot 10^{17}$	1,9

Verhältnis zur Zahl der aus den Kolloiden stammenden Na-Atome scheint geringer zu sein als bei Wieninger (l. c.); doch werden sicher merklich mehr FZ. gebildet als dem Kolloidabbau allein entsprechen würde (Spalte "Überschuß an FZ.").

Bezüglich der kurzwelligen Begleitmaxima der Kolloidbande bei 530, 445 und 380 nm konnten keine eindeutigen Ergebnisse gewonnen werden. Auch ob der geringe Anstieg bei 420 nm reell ist oder durch geringe Verschiedenheiten in Lage und/oder Halbwertsbreite der F-Banden im Staßfurter Kristall gegenüber den zur Differenzbildung benützten „Normkurven" der F-Bande vorgetäuscht ist, kann nicht entschieden werden.

[2] Eine weitere Verfälschung infolge der Inhomogenität der Kolloidverteilung ist ebenfalls unvermeidlich.

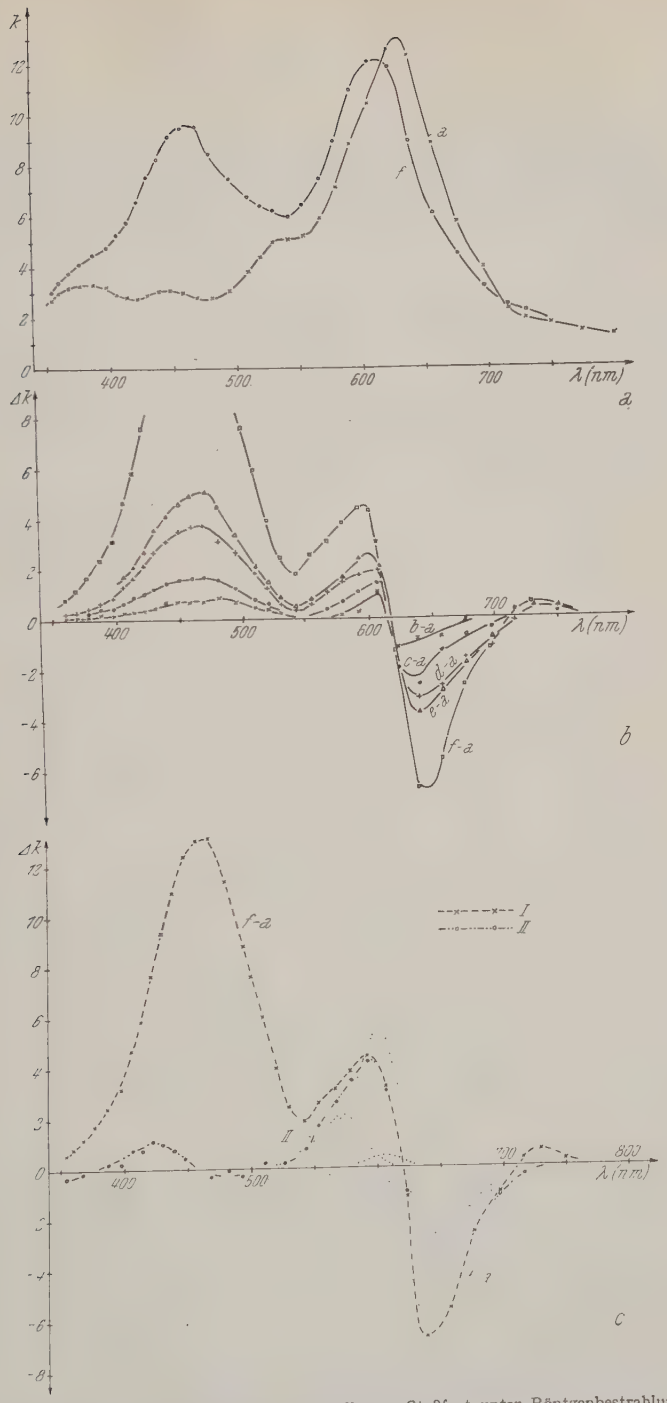

Abb. 5. Absorption des kolloidgefärbten Kristalls aus Staßfurt unter Röntgenbestrahlung

a) Kurve *a*: Ausgangszustand
Kurve *f*: Endzustand nach der Bestrahlung (Zwischenstadien der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet)

b) Differenzkurven

c) Auswertungsbeispiel, Zustand *f*

Kurve *I*: erste Differenz *f* minus *a*

Kurve *II*: zweite Differenz nach Abzug der F- und M-Banden von *I*

Punktierte Kurven: Kolloidbanden, deren Summe *II* ergibt

Ein Vergleich der Zunahme der FZ. in dem untersuchten Kristall mit dem Anstieg in einem unverfärbten Stück erscheint wenig sinnvoll, da die Bestimmung der FZ.-Konzentration wegen der genannten Unsicherheiten in der Analyse besonders in den Anfangsstadien nicht genügend genau ist.

Die Versuche an dem homogen kolloidverfärbten Kristall aus Heringen zeitigten prinzipiell die gleichen Ergebnisse (Abb. 6). Aus der Analyse der Differenzkurven scheint hervorzugehen, daß hier auch Zentren beteiligt sind, so daß eine quantitative Auswertung nur auf Grund hypothetischer Annahmen über die Anteile von Kolloiden und Zentren an den Absorptionskurven möglich gewesen wäre; die Berechnung der Umsätze wurde daher unterlassen.

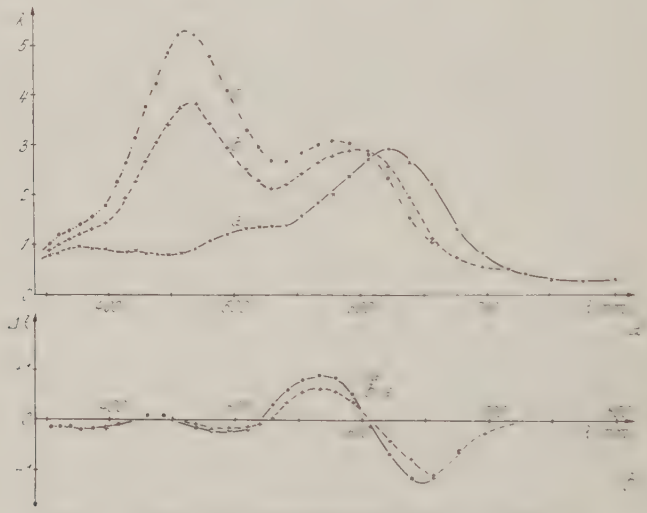

Abb. 6. Absorption des kolloidverfärbten Kristalls aus Heringen
a) Kurve *a*: Ausgangszustand
Kurve *b*: nach 2 Stunden Röntgenbestrahlung
Kurve *c*: nach 5 Stunden Röntgenbestrahlung
b) Differenzkurven

Der Tyndallkegel (ursprünglich rotorange) zeigte nach der Bestrahlung eine schwache, aber doch deutliche Farbverschiebung gegen gelborange: ein unmittelbares Anzeichen für die Verringerung der mittleren Kolloidgröße. Der Effekt kann durch die Veränderung der Absorption nicht vorgetäuscht sein, da diese im gelb-grünen Bereich zugenommen hat und daher die Farbänderung des Kegels eher erscheinen lassen müßte.

e) Röntgenbestrahlung additiv gefärbter Kristalle

Die an einem additiv blauviolett gefärbten Kristall gefundenen Effekte (Abb. 7) sind gering, aber noch gut erkennbar. Da im Gebiet

der stärksten Absorptionsabnahme um 640 nm keine Zentrenabsorption in NaCl bekannt ist, dürfte es sich auch hier um einen Abbau von Kolloiden handeln. Merkwürdig und zunächst unerklärlich ist, daß die Steigerung der Bestrahlungszeit von 2 auf $9^1/_2$ Stunden nahezu keine Veränderung der Absorption mehr bewirkt und auch die Zunahme der F-Bande nur mehr sehr gering ist.

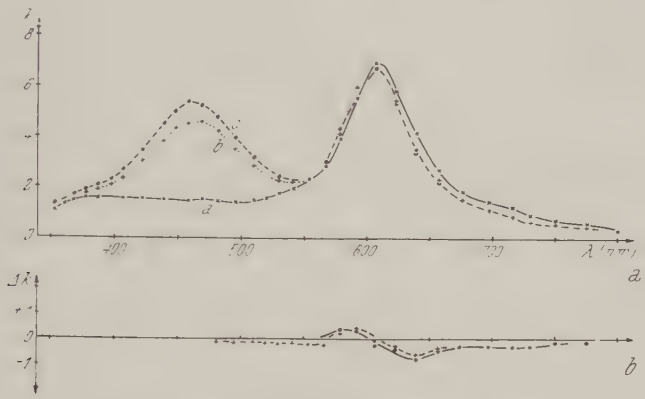

Abb. 7. Absorption des additiv blau gefärbten Kristalls
a) Kurve *a*: Ausgangszustand
Kurve *b*: nach 2 Stunden Röntgenbestrahlung
Kurve *c*: nach 11 Stunden Röntgenbestrahlung
b) Differenzkurven

Der zweite untersuchte additiv verfärbte Kristall enthielt offenbar sehr kleine Kolloide von nahezu einheitlichem Durchmesser (≈ 22 mμ nach SAVOSTIANOVA, l. c.; Farbe violett-rosa). Die Analyse ist durch die große Flankensteilheit der Kolloidbande und die enorme Dichte in der F-Bande nach Bestrahlung erschwert, doch dürfte eine geringe Abnahme um 580 nm sicher sein; die Halbwertsbreite der Differenzkurven stimmt mit derjenigen der Kolloidbande überein und nicht mit der (mindestens doppelt so großen) der R-Bande. Es kann daher wohl nicht mit völliger Sicherheit, aber doch mit großer Wahrscheinlichkeit behauptet werden, daß auch bei diesen kleinen Kolloiden ein Abbau unter Röntgenbestrahlung stattfindet.

Die ungewöhnliche Höhe der F-Bande dürfte in der Vorbehandlung des Kristalls ihre Ursache haben: zur Erzielung der gewünschten kleinen Kolloiddurchmesser mußte das Stück mehrmals einer thermischen Behandlung über der Flamme unterzogen werden, wobei sich die Randpartien (etwa je 1/4 der Kristalldicke) bereits entfärbten; die Oberflächen waren schon merklich getrübt (die Oberflächenschichten konnten wegen der zu geringen Dicke der Platte nicht mehr abgespalten werden). Letzteres ist offenbar für die hohe Absorption vor der Bestrahlung auch noch bei 800 nm — was ungefähr der Leerabsorption entspricht — verantwortlich. Die starke Ausbildung der F-Bande dürfte auf Grund der Temperung, noch dazu in wasserdampfgesättigter Atmosphäre, hinlänglich erklärt sein,

vor allem auch im Vergleich mit dem vorher beschriebenen additiv gefärbten Kristall, der *nach* der thermischen Behandlung aus dem Inneren eines größeren Stückes herausgespalten werden konnte.

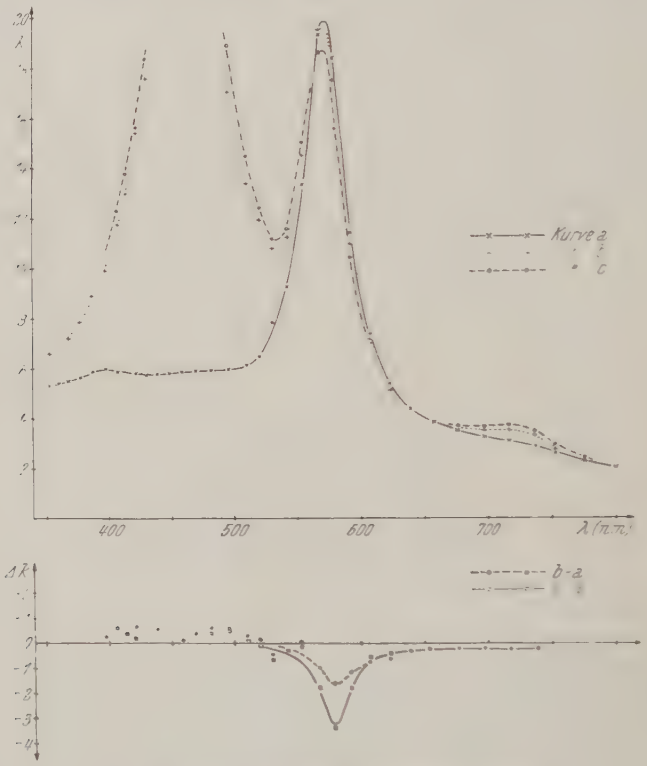

Abb. 8. Absorption des additiv rosa gefarbten Kristalls
Oben: Kurve *a*: Ausgangszustand
Kurve *b*: nach 70 min. Röntgenbestrahlung
Kurve *c*: nach 5 Stunden Röntgenbestrahlung
Unten: Differenzkurven

5. Diskussion

Die oben beschriebenen Ergebnisse zeigen, daß sekundäre Strahlungsfärbungen (R-Zentren, Kolloide) unter der Einwirkung von Röntgen- und α-Bestrahlung, zumindest teilweise, zerstört werden[3]. Die Beobachtungen von Przibram und Belar [2] und Wieninger [3] werden damit weitgehend bestätigt.

Daß Wieninger (l. c.) bei α-Bestrahlung von natürlichen zentrenverfärbten Violettsalzen und schwach kolloidverfärbten Kristallen praktisch keine Veränderungen im Gebiet der ursprünglichen Absorption fand, wird voraussichtlich

[3] Bezüglich der α-Bestrahlung kolloidverfärbter natürlicher Steinsalzkristalle sei auf die Untersuchungen von L. Wieninger [3] verwiesen.

nur durch die Untersuchungstechnik bedingt sein: wegen der geringen Reichweite der α-Strahlen kann eine Reaktion höchstens in 5% der verwendeten Kristalldicke eingetreten sein, was einer kaum mehr nachweisbaren Änderung von k entspricht.

Ob der Abbau der sekundären Färbungen bei genügend langer Bestrahlung quantitativ eintritt, konnte aus Ökonomiegründen nicht festgestellt werden, da die Umfärbung in den späteren Stadien sehr langsam fortschreitet. Für die RZ. ist die Frage mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit zu bejahen, denn es wurde mit α-, bzw. Röntgenbestrahlung eine Abnahme der R-Bande auf 23, bzw. 33% ihres Anfangswerts schon nach relativ geringen Strahlendosen gefunden, bei denen die Sättigung in der F-Bande noch lange nicht erreicht ist.

Im Falle der Kolloidfärbungen kann das gleiche nicht mit Sicherheit behauptet werden. Bei der relativ geringen Konzentration im Kristall aus Heringen würde die Annahme auf Grund der anfangs bedeutenden Veränderungen im Absorptionsspektrum vielleicht berechtigt sein, wenn diese nicht zu einem beträchtlichen Prozentsatz auf den Umsatz von Zentren zurückgehen (s. o.).

Bei dem sehr hoch verfärbten Kristall aus Staßfurt (mittlere Zahl der in den Kolloiden enthaltenen Na-Atome $\approx 1{,}2 \cdot 10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$, stellenweise wohl auch viel höher) wäre, wenn der in Tab. 1 für den FZ.-Überschuß angegebene Faktor 2 bis 3 extrapoliert wird, demnach mit einer FZ.-Konzentration von $\gtrsim 3 \cdot 10^{18}$ nach völliger Umfärbung zu rechnen; diese Konzentration liegt aber schon im Bereich der Sattwerte für nicht sehr intensive Bestrahlung. Wenn der Sattwert für die FZ.-Konzentration schon erreicht werden sollte, bevor die Kolloide restlos abgebaut sind, wäre vielleicht zu erwarten, daß sich dann ein Gleichgewichtszustand einstellt (die durch weitere Verkleinerung der Kolloide freiwerdenden Na-Atome müßten ja als FZ. erscheinen, deren Zahl dann über den Sattwert hinausginge). Allerdings wären, um in dieser Beziehung stichhältige Voraussagen machen zu können, genauere Kenntnisse über Mechanismus und Kinetik der Verfärbung nötig.

Daß im Prinzip auch additiv gebildete Kolloide unter der Wirkung von Röntgenbestrahlung sich im Muttergitter wieder auflösen können, zeigen die Versuche unter 4 e), jedoch scheinen die Effekte geringer zu sein als bei den natürlich (Strahlungs-) gefärbten Kristallen. Insbesondere der fast völlige Stillstand der Reaktion (und auch der FZ.-Bildung) bei dem aus dem Inneren eines Kristalls herausgespaltenen Präparat nach relativ kurzer Bestrahlung ist auffallend; eine einfache Erklärungsmöglichkeit scheint nicht zu bestehen.

Im Hinblick auf die Vorgänge, die sich im Kristall bei der Bestrahlung abspielen können, sei zunächst auf die — an sich bekannte — Tatsache hingewiesen, daß durch Strahlung im Gitter Fehlstellen erzeugt werden können. Das Beispiel des Abschn. 4 b) (Abb. 4) zeigt, daß die durch die Bestrahlung zusätzlich hervorgerufenen Defekte auch nach mäßiger Temperung (230°, 10 Stunden) nicht restlos ausheilen, bzw. sich bei erneuter Bestrahlung leicht wieder bilden.

Ob eine quantitative Deutung auf rein thermodynamischer Grundlage befriedigende Resultate liefern würde[4], oder ob man die Möglichkeit einer unter der Einwirkung der hochenergetischen Strahlung vermehrten Störstellenbildung (bzw. erleichterter Diffusion) in Betracht zu ziehen hätte, kann mangels genügend gesicherter Daten nicht beurteilt werden.

Etwas anders liegen die Verhältnisse bei der *Umfärbung* durch Bestrahlung: es war schon oben auf die auffällige Übereinstimmung der Konzentrations-Zeit (~ Dosis)-Kurven hingewiesen worden, wenn man das Seitzsche Modell für die RZ. (zwei Anionenlücken mit ein oder zwei Elektronen) bei der Umrechnung zugrundelegt.

Unter gleichen Voraussetzungen hatte Wieninger (l. c.) für den umgekehrten Vorgang, nämlich die thermische Umwandlung von FZ. in RZ., ebenfalls eine Ausbeute ≈ 1 gefunden; in beiden Fällen liegt allerdings eine gewisse Unsicherheit in der mehr oder minder willkürlichen Festsetzung für die Oszillatorstärke der RZ. = 1.

Wenn man annimmt, daß die „Rückfärbung" so vor sich geht, daß ein RZ. ionisiert wird und die nunmehr freien Lücken auseinanderdiffundieren, anschließend wieder Elektronen einfangen und als FZ. wiedererscheinen, so kann man aus den bekannten Daten der Strahlungsquellen abschätzen, daß für den ersten Abschnitt der Bestrahlung (1 Stunde für α-, $^1/_2$ Stunde für Röntgenbestrahlung) im Durchschnitt etwa 20 Elektronen pro zerstörtes RZ. durch Ionisation im Gitter gebildet werden[5], in den Anfangsstadien noch weniger. Unter der Annahme, daß jede einfache Ionisation eines RZ. bereits zu einem Zerfall führt[6], würde sich in den beiden Fällen eine Ionisationswahrscheinlichkeit für das RZ. ergeben, die um mehr als zwei, bzw. vier Größenordnungen über derjenigen für ein Anion des Grundgitters läge. Nach allen vorliegenden Daten über die direkte Ionisation durch Strahlung muß man diese Annahme wohl ablehnen.

[4] Den Vorstellungen von F. Seitz [8], [11] folgend, wäre folgender Vorgang denkbar: Es sind zu Beginn der Bestrahlung Lücken paare im Gitter gelost; durch Einfang von (Defekt-)Elektronen werden einige davon, unter Bildung von Zentren, dem Gleichgewicht entzogen und es wandern unter der Wirkung des entstehenden Konzentrationsgefalles neue positive und negative Lücken, bzw. Paare, in das Gitter ein. Als Quellen kämen submikroskopische Poren, Versetzungen oder Fremdionen in Frage. Nach der Entfärbung wandern die Schottky-Defekte nicht vollständig wieder an ihre Ursprungsstelle zurück, sondern bleiben in lockerer Bindung oder/und feinerer Verteilung im Gitter (z. B. als freie Lückenpaare oder etwas größere Aggregate), so daß bei erneuter Bestrahlung die Nachlieferung der nötigen Lücken schneller vor sich geht.

[5] Unter Zugrundelegung eines Energieaufwands von 50 eV pro Trägerpaar (nach H. U. Harten [12]); mit dem von Przibram extrapolierten Wert von 35 eV ([1], S. 64) würde sich nichts Wesentliches ändern.

[6] Nach Seitz wäre allerdings das durch einfache Ionisation aus einem $R_2Z.$ hervorgehende $R_1Z.$ auch noch stabil, so daß man für die $R_2Z.$ doppelte Ionisierung verlangen müßte, wodurch die Verhältnisse noch ungünstiger würden.

Damit bleiben noch zwei Möglichkeiten offen:

a) Das RZ. wird nicht durch Ionisation, sondern durch Einfang von Defektelektronen neutralisiert, der weitere Vorgang verläuft wie oben. Die beobachteten Erscheinungen sind so nur dann deutbar, wenn der Einfangquerschnitt für ein Defektelektron beim RZ. viel größer, oder derjenige für ein Elektron viel kleiner ist als beim FZ., oder auch beide Fälle gleichzeitig realisiert sind. Hierüber liegen noch keine zahlenmäßigen Daten vor.

b) Es findet eine Energieübertragung aus einem größeren Gitterbereich auf das RZ. statt, so daß dieses — mit oder ohne gleichzeitige Ionisierung — dissoziiert; nach dem von Seitz angegebenen Verlauf des Potentials mit dem Abstand der beiden Lücken für das angeregte RZ. wäre der letztere Fall wohl denkbar.

Es sei in diesem Zusammenhang auf die Temperaturabhängigkeit der Gleichgewichte zwischen den verschiedenen Zentren (Abs. 4 c, s. a. [13]) hingewiesen: bei genügend schneller Temperatursteigerung können die RZ., auf dem Wege über die Zwischenzentren, in FZ. dissoziieren, ohne daß während der Umwandlung eine völlige Entfärbung eintritt (soweit der visuelle Eindruck den Schluß zuläßt, scheint die Entfärbung sogar relativ gering zu sein). Die Analogie mit der Strahlungsumfärbung liegt auf der Hand: auch hier wurde das Auftreten von Zwischenzentren bei 510 nm im Falle des natürlich violett gefärbten Kristalls bei Röntgenbestrahlung beobachtet (Abschn. 4 b)[7]. Der Autor glaubt, dies als Argument für den letzten vorgeschlagenen Mechanismus auffassen zu dürfen: durch kurzzeitige starke Erhöhung der Energiedichte in der unmittelbaren Umgebung eines RZ. (äquivalent einer plötzlichen Temperatursteigerung mit nachfolgendem Abschrecken infolge Dissipation der auf engem Raum zusammengedrängten Energie) wird das RZ., analog wie im thermischen Fall, unter Bildung von FZ. dissoziieren, und zwar wahrscheinlich nach einem ähnlichen Mechanismus (Zwischenzentren!)[8].

Eine kurze Rechnung zeigt, daß die *mittlere* Energiedichte, selbst innerhalb eines „Spike" bei α-Bestrahlung, kaum ausreichen dürfte, um die beobachteten Effekte zu erklären.

---

[7] Bei der Bestrahlung des künstlich gefärbten Kristalls (Abs. 4 a) konnte aus der Kurvenanalyse nicht auf ein Anwachsen der Zwischenzentren geschlossen werden; es ist aber nicht ausgeschlossen, daß sich solche von vorneherein bereits im Gleichgewicht mit den RZ. im Kristall befinden, wie aus der gegenüber natürlichen Violettsalzen um 65% vergrößerten Halbwertsbreite der R-Bande hervorgeht. Auch hätte Differenzbildung mit einer F-Bande geringerer Höhe eine Zunahme der Absorption im Gebiet der Zwischenzentren ergeben.

[8] Die *lang*welligen Zwischenzentren um 670 nm wurden allerdings bei der Strahlungsumfärbung nicht beobachtet; ihre Funktion scheint ebenso wenig geklärt zu sein wie diejenige der kurzwelligen.

Unter diesem Gesichtspunkt wäre auch der Vorgang bei der Auflösung der Kolloide, nicht nur bei α-, sondern auch bei Röntgenbestrahlung, durchaus plausibel.

Was nun die Frage nach den Verhältnissen bei der Strahlungsfärbung des Steinsalzes in der Natur betrifft, soll vor allem auf die von K. Przibram [1], S. 131 ff. und von L. Wieninger [14] durchgeführten Energiebetrachtungen kurz eingegangen werden. Es wurde l. c. bemerkt, daß die in der Natur anzunehmenden Strahlungsquellen nur dann für die Erklärung sehr hoher Zentrenzahlen (Kolloidsalze) ausreichen würden, wenn während der Bestrahlung dauernd FZ. durch Koagulation (zu RZ. und Kolloiden) aus dem Kristallgitter entfernt werden, so daß man mit einer geringer FZ.-Konzentration entsprechenden guten Ausnützung der Strahlungsenergie rechnen kann. Nach obigem wäre aber prinzipiell das Umgekehrte zu erwarten, nämlich Auflösung höherer Zentren und Kolloide unter Bestrahlung zu F-Zentren. Wenn es erlaubt ist, aus dem Laboratoriumsversuch (hohe Strahlungsdichten) auf die Vorgänge in der Natur (wesentlich geringere Intensitäten) zu extrapolieren, müßte man unbedingt Faktoren in Betracht ziehen, die eine Stabilisierung der *sekundären* Färbungen bewirken, wie sie z. B. in plastischer Verformung [9], [10] für die R-Zentren gefunden wurden. Es scheint, als ob hier das Hauptproblem der natürlichen, insbesondere der kolloidalen, Färbungen läge.

Danksagung

Der Autor ist vor allem Herrn Prof. Dr. K. Przibram für sein Interesse an dieser Arbeit und fördernde Diskussionen zu Dank verpflichtet, sowie Frau Prof. Dr. B. Karlik und Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. E. Schmid für die Bereitstellung von Mitteln, bzw. des Arbeitsplatzes und Herrn Doz. DDr. J. Zakovsky für die Überlassung der verwendeten Röntgenröhre und die bereitwillige Ausführung der Strahlungsmessungen.

Literatur

1. K. Przibram, Verfärbung und Lumineszenz. Wien: Springer-Verlag, 1953.
2. K. Przibram und M. Belar, Wien. Ber. IIa **132**, 261 (1923).
3. L. Wieninger, Wien. Ber. IIa **159**, 113 (1950).
4. L. Wieninger und N. Adler, Wien. Ber. IIa **159**, 395 (1950).
5. L. Wieninger und N. Adler, Wien. Ber. IIa **159**, 83 (1950).
6. A. Smakula, Zs. Phys. **59**, 603 (1930).
7. M. Savostianova, Zs. Phys. **64**, 262 (1930).
8. F. Seitz, Rev. Mod. Phys. **18**, 384 (1946).
9. M. Haberfeld, Wien. Ber. IIa **142**, 135 (1933).
10. L. Wieninger, Wien. Ber. IIa **159**, 381 (1950).
11. F. Seitz, Rev. Mod. Phys. **26**, 7 (1954).
12. H. U. Harten, Zs. Phys. **126**, 619 (1949).
13. A. B. Scott und L. P. Bupp, Phys. Rev. **79**, 341 (1950).
14. L. Wieninger, Wien. Ber. IIa **160**, 147 (1951).

On the General Form of the Special Theory of Relativity

By

M. Z. v. Krzywoblocki

University of Illinois, Urbana, Ill., U.S.A.

(*Received September 1, 1959*)

Summary

The author derives the equations of the special theory of relativity under the assumption that the reference velocity, which is assumed to be a constant in the classical form of the special theory of relativity, is a variable function of position and time.

Introduction

EINSTEIN derived his theory of the special relativity under two postulates which are not always formulated in a unique way. They may be put down in the following forms:

1. When properly formulated the laws of physics are invariant to a transformation from one reference system to another moving with a linear uniform relative velocity.

2. The velocity of propagation of an electromagnetic disturbance in free space is a universal constant which is independent of the reference system.

It is the second postulate which is not preserved in the present note. It is assumed that due to various force fields of various nature existing in the space, the reference velocity c is a function of the four coordinates (x, y, z, t). In the classical theory of relativity, the velocity of light is used as some sort of the reference communication velocity. An adjustment of the time scales can be supposed to be effected experimentally, as it actually is in common practice, by sending light signals (i.e., radio signals) back and forth and correcting for time of propagation on the assumption of a constant velocity of light. But there cannot be a logical objection against the idea of sending signals by means of vehicles which may move with a variable velocity (i.e., a function of all the four coordinates in a four dimensional space) greater than the velocity of light.

1. Transformation of Coordinates

At first we shall derive the transformation formulas when the reference velocity (assumed in the past to be a constant equal to the velocity of light in vacuum) is a variable function of space and time. Let S and S' denote two inertial frames, of which S' has a uniform translational velocity u relative to S. The axes are chosen so that the x-axes and the xy-planes in the two frames slide along each other. At the origins, let us count time from the instant at which these points momentarily coincide. Let t be the time at which some event happens at a point $\{x, y, z\}$, as measured by the observer on frame S, and let $\{x', y', z', t'\}$ be the coordinates and time of the same event as measured by the observer on S'. The analysis is performed under the assumption that the reference velocity c (assumed to be constant in the classical theory) is a function of the position and time, i.e., $c = c\,(x, y, z, t)$ or $c' = c'\,(x', y', z', t')$. The fundamental requirement of the special theory of relativity, the invariance of the distance between two points P_1 and P_2 in S, or of the corresponding points P_1' and P_2' in S', is:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2\,(dt)^2 = \\ = (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - (c'^2)\,(dt')^2. \tag{1.1}$$

The form of the Lorentz transformation in the classical theory is well-known ($c^2 =$ universal constant):

$$x' = \bar{\gamma}(x - u\,t); \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = \bar{\gamma}(t - u\,x\,c^{-2}); \\ \bar{\gamma} = (1 - u^2\,c^{-2})^{-1/2} = c(c^2 - u^2)^{-1/2}; \tag{1.2}$$

or

$$x = \bar{\gamma}(x' + u\,t'); \qquad y = y'; \qquad z = z'; \qquad t = \bar{\gamma}(t' + u\,x'\,c^{-2}). \tag{1.3}$$

In the present case we require that the characteristic length (ds) remains invariant under the following group of transformation:

$$x' = \alpha\,x - \beta\,u\,t; \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = \gamma\,t - \delta\,u\,x\,c^{-2}, \tag{1.4}$$

where, in general, the coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, are supposed to be functions of (x, t, c) and u, with u playing a role of a parameter. Hence:

$$\alpha = \alpha(x, t, c; u); \qquad \beta = \beta(x, t, c; u); \qquad \gamma = \gamma(x, t, c; u); \\ \delta = \delta(x, t, c; u). \tag{1.5}$$

An elementary operation yields:

$$x = C\,x' - B\,u\,t'; \qquad t = A\,t' - D\,u\,x'\,c'^{-2}, \tag{1.6}$$

with $A = A(x', t', c'; u)$, etc. The following relations must be satisfied:

$$A = \alpha\,c^2\,J^{-1}; \qquad -B = \beta\,c^2\,J^{-1}; \qquad C = \gamma\,c^2\,J^{-1}; \qquad -D = c'^2\,\delta\,J^{-1}; \tag{1.7 a}$$

$$\alpha = A\,J'^{-1}; \qquad -\beta = B\,J'^{-1}; \qquad \gamma = C\,J'^{-1}; \qquad -\delta = c^2\,c'^{-2}\,D\,J'^{-1}; \tag{1.7 b}$$

where the determinants:

$$J = c^2\,\alpha\,\gamma - u^2\,\beta\,\delta; \qquad J' = A\,C - B\,D\,u^2\,c'^{-2}, \tag{1.8 a}$$

$$J' = c^2\,J^{-1}, \tag{1.8 b}$$

cannot be equal to zero. From Eq. (1.6) one gets:

$$dx = C\,dx' + x'\,dC - u\,B\,dt' - u\,t'\,dB; \tag{1.9}$$

$$dt = A\,dt' + t'\,dA - u\,D\,c'^{-2}\,dx' - u\,x'\,d(D\,c'^{-2}); \tag{1.10}$$

or

$$dx = K\,dx' - u\,L\,dt'; \qquad dt = -M\,u^{-1}\,dx' + N\,dt', \tag{1.11}$$

where:

$$K = C + x'\,\partial C/\partial x' - u\,t'\,\partial B/\partial x'; \tag{1.12}$$

$$L = B - u^{-1}\,x'\,[\partial C/\partial t' + (\partial C/\partial y')\,v' + (\partial C/\partial z')\,w'] + \\ + t'\,[\partial B/\partial t' + (\partial B/\partial y')\,v' + (\partial B/\partial z')\,w']; \tag{1.13}$$

$$M = u^2\,D\,c'^{-2} + u^2\,x'\,\partial/\partial x'\,(D\,c'^{-2}) - t'\,u\,\partial A/\partial x'; \tag{1.14}$$

$$N = A + t'\,[\partial A/\partial t' + (\partial A/\partial y')\,v' + (\partial A/\partial z')\,w'] - \\ - u\,x'\,[\partial/\partial t'\,(D\,c'^{-2}) + (\partial/\partial y'\,(D\,c'^{-2}))\,v' + (\partial/\partial z'\,(D\,c'^{-2}))\,w'], \tag{1.15}$$

with $dy'/dt' = v'$, $dz'/dt' = w'$. Keeping in mind that $y = y'$, $z = z'$ one gets:

$$(dx)^2 - c^2\,(dt)^2 = (K^2 - c^2\,u^{-2}\,M^2)\,(dx')^2 - 2\,(K\,L\,u - c^2\,u^{-1}\,M\,N)\,dx'\,dt' + \\ + (L^2\,u^2 - N^2\,c^2)\,(dt')^2 = (dx')^2 - c'^2\,(dt')^2. \tag{1.16}$$

Since x' and t' are independent variables, the coefficients of dx' and dt' must be separately equal to zero, which leads to a system of three algebraic equations in four unknowns:

$$\left.\begin{aligned} K^2 - c^2\,u^{-2}\,M^2 - 1 &= 0; && (1.17)\\ K\,L\,u - c^2\,u^{-1}\,M\,N &= 0; && (1.18)\\ L^2\,u^2 - c^2\,N^2 + c'^2 &= 0. && (1.19) \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

This allows us to assume arbitrarily a value of the one of the four functions K, L, M, N. To obtain a determined system (I), one may assume $L = -N$, which leads to:

$$K = -c^2\,u^{-2}\,M = c(c^2 - u^2)^{-1/2}; \qquad M = -u^2\,c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}; \tag{1.20}$$

$$N = -L = c'(c^2 - u^2)^{-1/2}. \tag{1.21}$$

To obtain the transformation formulas, we refer directly to the system of equations (1.9) to (1.11):

$$d(C\,x') - u\,d(B\,t') = K\,dx' - u\,L\,dt'; \tag{1.22}$$

$$d(A\,t') - u\,d(x'\,D\,c'^{-2}) = -M\,u^{-1}\,dx' + N\,dt'. \tag{1.23}$$

A few words have to be said about the function c. In the system S this function is a function of the $\{x, y, z, t\}$ — independent variables. When the transformation relations

$$\{x, y, z, t\} \longleftrightarrow \{x', y', z', t'\}$$

are uniquely defined, one can find in a straightforward manner the form of the function $c'\,\{x', y', z', t'\}$ when the form of the function $c(x, y, z, t)$ is known, i.e.,

$$c(x, y, z, t) \longleftrightarrow c'(x', y', z', t').$$

In the present case, in practical applications, one may find a difficulty in finding the relation $c \longleftrightarrow c'$, since the transformation formulas themselves depend upon the value of $c \longleftrightarrow c'$, i.e.,

$$x = x(x', t'; c'); \qquad t = t(x', t'; c'),$$

and vice versa [see Eqs. (1.4) and (1.6)], $x' = x'(x, t, c)$, $t' = t'(x, t, c)$. Inserting Eqs. (1.20) and (1.21) into Eqs. (1.22) and (1.23) and using Eqs. (1.6) and not interchanging freely $c(x, y, z, t)$ and $c'(x', y', z', t)$ depending upon in which space we have to perform the integration operation, we get:

$$x = C\,x' - u\,B\,t' = \int c(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' + u \int c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'; \tag{1.24}$$

$$t = A\,t' - u\,D\,c'^{-2}\,x' = u \int c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' - \int c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'. \tag{1.25}$$

These are the most general forms of LORENTZ transformation which for $c' = c = \text{const.}$, transform into the classical equations (1.3).

To obtain the other set of the transformation formulas, one may begin with the system of equations (1.4):

$$dx' = \alpha\,dx + x\,d\alpha - u\,\beta\,dt - u\,t\,d\beta = P\,dx + u\,R\,dt; \tag{1.26}$$

$$dt' = \gamma\,dt + t\,d\gamma - u\,\delta c^{-2}\,dx - u\,x\,d(\delta c^{-2}) = u^{-1}\,U\,dx + T\,dt. \tag{1.27}$$

From the equality:

$$(dx')^2 - c'^2(dt')^2 = P^2(dx)^2 + 2\,P\,R\,u\,dx\,dt + u^2\,R^2(dt)^2 - c'^2 \ldots = \\ = (dx)^2 - c^2(dt)^2, \tag{1.28}$$

one obtains three relations:

$$P^2 - c'^2\,u^{-2}\,U^2 - 1 = 0; \tag{1.29}$$

$$u\,P\,R - c'^2\,u^{-1}\,U\,T = 0; \tag{1.30}$$

$$u^2\,R^2 - c'^2\,T^2 + c^2 = 0. \tag{1.31}$$

With the assumption that:

$$R = -\,T, \tag{1.32}$$

one gets:

$$P = -\,c'^2\,u^{-2}\,U = c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}; \tag{1.33}$$

$$R = -\,T = -\,c(c'^2 - u^2)^{-1/2}; \tag{1.34}$$

$$U = -\,u^2\,c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}. \tag{1.35}$$

Using Eqs. (1.26) to (1.27) one gets the transformation formulation:

$$dx' = d(\alpha\,x) - u\,d(\beta\,t) = P\,dx + u\,R\,dt; \tag{1.36}$$

$$dt' = d(\gamma\,t) - u\,d(\delta c^{-2}\,x) = u^{-1}\,U\,dx + T\,dt; \tag{1.37}$$

or

$$x' = \int c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dx - u \int c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dt; \qquad (1.38)$$

$$t' = \int c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dt - u \int c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dx, \qquad (1.39)$$

which for $c = \text{const.}$ transform directly into the classical forms (1.2). Comparing the transformation formulas (1.24), (1.25) and (1.38), (1.39) one sees that there appear three kinds of integrals:

$$I_1 = \int c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dx; \qquad I_1' = \int c(c^2 - u^2)^{-1/2}\, dx'; \qquad (1.40)$$

$$I_2 = \int c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dx; \qquad I_2' = \int c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\, dx'; \qquad (1.41)$$

$$I_3 = \int c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dt; \qquad I_3' = \int c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\, dt'. \qquad (1.42)$$

One has:

$$x = I_1' + u I_3'; \qquad t = u I_2' + I_3'; \qquad (1.43)$$

$$x' = I_1 - u I_3; \qquad t' = I_3 - u I_2. \qquad (1.44)$$

One can verify the coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ and A, B, C, D. By comparison of Eqs. (1.6) and (1.43) evidently there must be:

$$C = x'^{-1} I_1'; \qquad B = -t'^{-1} I_3'; \qquad A = t'^{-1} I_3'; \qquad D c'^{-2} = -x'^{-1} I_2'; \qquad (1.45)$$

the comparison of Eqs. (1.4) and (1.44) furnishes:

$$\alpha = x^{-1} I_1; \qquad \beta = t^{-1} I_3; \qquad \gamma = t^{-1} I_3; \qquad \delta c^{-2} = x^{-1} I_2. \qquad (1.46)$$

The determinants J and J', Eqs. (1.8), are:

$$J = c^2 (x t)^{-1} I_3 (I_1 - u^2 I_2); \qquad (1.47)$$

$$J' = (x' t')^{-1} I_3' (I_1' - u^2 I_2'); \qquad J' = c^{-2} J^{-1}. \qquad (1.48)$$

One can verify the formulas, derived above, in the following way:

Multiply the second equation (1.43) by u and subtract the result from the first equation (1.43), thus obtaining:

$$x' = (x - u t)\, [(I_1' - u^2 I_2')\, x'^{-1}]^{-1}, \qquad (1.49)$$

or with the use of the second equation (1.45):

$$x' = -B(x - u t)\, J'^{-1}. \qquad (1.50)$$

From Eqs. (1.45) one has $B = -A$, and from Eqs. (1.7 b):

$$x' = \alpha x - u \beta t = I_1 - u I_3, \qquad (1.51)$$

where, in the last step, the first two equations (1.46) are used. Eq. (1.51) is identical with Eq. (1.44).

The systems of coordinates $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ and $\{x_1', x_2', x_3', x_4'\}$ whose quadratic forms are:

$$(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (-i\,c\,dt)^2, \tag{1.52}$$

and

$$(dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2 + (dx_4')^2 = \\ = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 + (-i\,c'\,dt')^2, \tag{1.53}$$

are orthogonal, since the coefficients $g_{ij} = 0$, for $i \neq j$. But the transformation of coordinates $x_i = x_i(x_j')$ is not a linear one. Eqs. (1.40) to (1.42) can be modified by a simple use of the integration by parts:

$$I_1 = c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,x - \int x\,d\big(c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big); \tag{1.54}$$

$$I_2 = c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,x - \int x\,d\left(c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\right); \tag{1.55}$$

$$I_3 = c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,t - \int t\,d\big(c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big); \tag{1.56}$$

$$I_1' = c(c^2 - u^2)^{-1/2}\,x' - \int x'\,d\big(c(c^2 - u^2)^{-1/2}\big); \tag{1.57}$$

$$I_2' = c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\,x' - \int x'\,d\big(c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\big); \tag{1.58}$$

$$I_3' = c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\,t' - \int t'\,d\big(c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\big). \tag{1.59}$$

Hence the transformation formulas may take the forms:

$$x = (c^2 - u^2)^{-1/2}\,(c\,x' + u\,c'\,t') - \int \big[x'\,d\big(c(c^2 - u^2)^{-1/2}\big) + \\ + u\,t'\,d\big(c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\big)\big]; \tag{1.60}$$

$$t = (c^2 - u^2)^{-1/2}\,(c'\,t' + u\,x'\,c^{-1}) - \int \big[t'\,d\big(c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\big) + \\ + u\,x'\,d\big(c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\big)\big]; \tag{1.61}$$

$$x' = (c'^2 - u^2)^{-1/2}\,(c'\,x - u\,c\,t) - \int \big[x\,d\big(c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big) - \\ - u\,t\,d\big(c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big)\big]; \tag{1.62}$$

$$t' = (c'^2 - u^2)^{-1/2}\,(c\,t - u\,c'^{-1}\,x) - \int \big[t\,d\big(c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big) - \\ - u\,x\,d\big(c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big)\big]. \tag{1.63}$$

2. Contractions in Space and Time

These two well-known notions in the special theory of relativity take the following forms:

(a) Contraction in space at the same time:

$$L = x_2 - x_1; \qquad L_0 = x_2' - x_1'; \tag{2.1}$$

using Eq. (1.62) one gets:

$$L_0 = \bar{\bar{\gamma}}\, L - \int L\, d\bar{\bar{\gamma}}; \qquad \bar{\bar{\gamma}} = c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}; \tag{2.2}$$

$$L = \bar{\bar{\gamma}}^{-1} L_0 - \int L_0\, d(\bar{\bar{\gamma}}^{-1}), \tag{2.3}$$

when the integration by parts is used.

(b) Contraction in time with $T = t_2 - t_1$:

$$T_0 = t_2' - t_1' = \bar{\gamma}_1 T - \int T\, d\bar{\gamma}_1; \qquad T = \bar{\gamma}_1^{-1} T_0 - \int T_0\, d(\bar{\gamma}_1^{-1});$$
$$\bar{\gamma}_1 = c(c'^2 - u^2)^{-1/2}. \tag{2.4}$$

3. Transformation of Velocities

From Eqs. (1.44) one has:

$$dx' = \bar{\gamma}_2(c'\, dx - u\, c\, dt); \qquad dt' = \bar{\gamma}_2(c\, dt - u\, c'^{-1}\, dx); \tag{3.1}$$

with $dy' = dy$, $dz' = dz$, $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, etc., one gets:

$$v_x' = \left(\frac{c'}{c} v_x - u\right)(1 - u\, v_x (c'\, c)^{-1})^{-1}; \quad v'_y = v_y \left[c\, \bar{\gamma}_2 (1 - u\, v_x (c'\, c)^{-1})\right]^{-1}; \tag{3.2}$$

$$v_z' = v_z \left[c\, \bar{\gamma}_2 (1 - u\, v_x (c'\, c)^{-1})\right]^{-1}; \qquad \bar{\gamma}_2 = (c'^2 - u^2)^{-1/2}. \tag{3.3}$$

Let us construct the square of the velocity $v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$, and let us put down $v^2 = c^2$, or $v_y^2 + v_z^2 = c^2 - v_x^2$; then one can verify that $v' = c'$ (but not c). Similarly, from Eqs. (1.43) one has:

$$dx = \bar{\gamma}'(c\, dx' + u\, c'\, dt'); \qquad dt = \bar{\gamma}'(c'\, dt' + u\, c^{-1}\, dx'); \tag{3.4}$$

$$v_x = \left(\frac{c}{c'} v_x' + u\right)(1 + u (c'\, c)^{-1} v_x')^{-1};$$

$$v_y = v_y' \left[c'\, \bar{\gamma}' (1 + u\, v_x' (c'\, c)^{-1})\right]^{-1}; \tag{3.5}$$

$$v_z = v_z' \left[c'\, \bar{\gamma}' (1 + u\, v_x' (c'\, c)^{-1})\right]^{-1}; \qquad \bar{\gamma}' = (c^2 - u^2)^{-1/2}; \tag{3.6}$$

and

$$v^2 = (1 + u\, v_x' (c'\, c)^{-1})^{-2} \left[\left(\frac{c}{c'} v_x' + u\right)^2 + \left((c^2 - u^2)\, c'^{-2}\right)(v_y'^2 + v_z'^2)\right]. \tag{3.7}$$

With $v' = c'$, or $(v_y'^2 + v_z'^2) = (c'^2 - v_x'^2)$, the expression in the square bracket becomes equal to:

$$(c^2 + 2\, u\, v_x'\, c\, c'^{-1} + u^2 v_x'^2\, c'^{-2}) = (c + u\, v_x'\, c'^{-1})^2, \tag{3.8}$$

which shows that in this case $v^2 = c^2$ (but not c'^2). Thus, when in the reference system S, the velocity of motion, v, is equal to the reference velocity c, the velocity of motion v' in S' is equal to c' but not to c (i.e., the reference velocity in S), and vice versa. Thus, the characteristic property of the classical Lorentz transformation that the speed of light in vacuum is always equal to c, changes in the present transformation to the property, given above.

4. Variation of Mass, Force, Kinetic Energy, Relation Between Mass and Energy

The considerations of the variation of mass in the theory of the special relativity involve the notion of velocity. Since the functional form of the expressions for the velocity is identical in the classical theory and in the present one[1], the equation for the variation of mass remains unchanged, i.e., in S one has:

$$m = m_0(1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}. \tag{4.1}$$

Similarly, the relation between mass and energy remains in its classical form but with c being a variable function.

All the calculations above were performed under the assumption that the fundamental aspects of the special theory of relativity remain unchanged. This means that the motion of one frame with respect to another one is a uniform one with a constant velocity u, that the phenomena which make the reference velocity a variable function of the position and time do not effect the magnitude of the velocity u, and do not originate the appearance of forces of any sort acting on the moving reference system, etc. The vanishing of the Jacobians, Eqs. (1.47) and (1.48), gives after differentiation with respect to (x) or (x') the results: $u^2 = c'^2$ or $u^2 = c^2$ (similar to the classical result). For those values the transformations of coordinates cease to be valid.

[1] The appearance of c and c' in eqs. (3.2) and (3.5) does not change eq. (4.1), as one can easily verify.

On Certain Fundamental Concepts of Classical and Quantum Kinetic Theory of Gases

By

C. G. Whittenbury and **M. Z. v. Krzywoblocki**

University of Illinois, Urbana, Ill., U.S.A.

(*Received September 9, 1959*)

Table of Contents

Introduction

1. Fundamental Aspects of the Description of N-Particle Systems
   - 1.1. Theorems and System Specification
   - 1.2. Classical Mechanics
   - 1.3. Quantum Mechanics
   - 1.4. The WIGNER Equation
   - 1.5. Reduced WIGNER Equation
2. Equations for the Single Particle Distribution Function
   - 2.1. General Remarks
   - 2.2. Time Average Reduction. Ross and KIRKWOOD Approach
   - 2.3. The Truncated Classical Distribution Function
     - 2.3.1. Preliminary Remarks
     - 2.3.2. Elementary Derivation of BOLTZMANN Equation
     - 2.3.3. Derivation of BOLTZMANN Equation from LIOUVILLE Equation
   - 2.4. Truncated WIGNER Function Equation
   - 2.5. The Single Particle D.F. Equation in Quantum Mechanics. A Discussion of Various Derivations
3. The Theory of N-Particle Systems Involving Many-particle Interactions
   - 3.1. General Remarks
   - 3.2. Previous Theories
   - 3.3. A New Truncation Procedure
   - 3.4. The Equation for ${}^{T}f_{W}^{(1)+1}$
   - 3.5. The Equation for ${}^{I}f_{W}^{(1)}$
4. Particle Systems with Generalized Interactions
   - 4.1. General Discussion
   - 4.2. System Description
   - 4.3. Particle Species and Interactions
     - 4.3.1. Generalized Interactions and Mixtures
     - 4.3.2. Multi-truncation and Generalized Cross Sections
   - 4.4. Particle Dynamics and Statistics
   - 4.5. System Models

Bibliography
Appendix A
Appendix B
Appendix C
Appendix D

Introduction

The developments of kinetic theory which describe the macroscopic dynamic behavior of a gaseous system of many particles are largely based upon the classical Boltzmann equation. This basis imposes many restrictions on the type of particle system that may be described in sufficient detail and on a satisfactorily general physical foundation.

In this paper the formal basis of a new method is developed which may be applied to a quite general class of many particle systems. The method, which is founded upon the formalism of quantum mechanics, is applicable to systems in which particle interactions describable by means only of quantum mechanics occur. The description of classical systems is included in the method as the classical limit of the quantum formalism. The method allows a separate consideration of the various types of particle interactions that may occur, such as two-body, many particle, atomic and nuclear reactions, but combines the effects of these interactions in a system of simultaneous equations. This system of equations provides a natural basis for the construction of models to describe the particle system in question.

In the first chapter, some fundamental aspects of the physical and mathematical description of an N-particle system are introduced and discussed.

In the second chapter the equation for the single particle distribution function is derived for the classical and quantum cases. The equation in classical mechanics, i.e., the Boltzmann equation, is derived in Sects. 2.3.2 and 2.3.3 upon both an elementary and a rigorous basis in order to provide a consistent evaluation of those conditions of applicability of the Boltzmann equation, and to prepare the foundation of the aforementioned new method which is developed in the following chapter. The most general previous derivation of the equation in quantum mechanics, i.e., the quantum mechanical equivalent of the Boltzmann equation, is outlined and discussed in Sect. 2.2. A new derivation of this equation is given in Sect. 2.4 which is believed to possess several advantages over previous derivations from both a physical and mathematical point of view.

The analysis of the third chapter is a logical formal development of the method presented in Sect. 2.4, in which the phase space of the particle system is subdivided, or truncated, into domains which may be characterized by the various types of particle interactions taking place. In this manner the basic formalism is developed of a new method for describing the dynamical behavior of systems involving many-particle

interactions, and where the latter may be naturally described in the quantum formalism.

In the fourth chapter the generalization of the basic formalism of the new method presented in the third chapter is discussed, and the relation of this new method to the previous kinetic theories of many particle systems is analysed in conclusion.

1. Fundamental Aspects of the Description of N-Particle Systems

1.1. Theorems and System Specification

A number of theorems which will be referred to in the text are listed below.

A function $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ is defined and bounded on the set $P \times \{t\}$ where $P \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{P} = \{\boldsymbol{\eta} | \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p};\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k, \ldots, \boldsymbol{r}_N,\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ where $\boldsymbol{r}_k$ and $\boldsymbol{p}_k$ are vectors in three dimensional space, and where $\{t\}$ is the set of all t.

The following theorems hold for $f(\boldsymbol{\eta}, t)$.

Theorem I. [2, p. 260][1].

The function $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ is RIEMANN-integrable on the closed set $P \times \{t\}$, where $P \subset \mathscr{P}$, $\Leftrightarrow$ the set

$$D = \{\boldsymbol{\eta}, t | \boldsymbol{\eta} \in P, t \in \{t\}; f(\boldsymbol{\eta}, t) \text{ is not continuous at } \boldsymbol{\eta}, t\}$$

has measure zero.

Theorem II. [2, p. 221].

Let η_{ki} and η_{lj} be components of the vectors $\boldsymbol{\eta}_k$, $\boldsymbol{\eta}_l$ where $\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_l \in P$, where $P \subset \mathscr{P}$, and denote the domain of integration on $\{\eta_{ki}\}$ and $\{\eta_{lj}\}$ by P_{ki} and P_{lj} so that $P_{ki} \times P_{lj} \subset P$. Then for $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ satisfying the conditions of Theorem I,

$$\int_{P_{ki}} d\eta_{ki} \int_{P_{lj}} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\eta_{lj} = \int_{P_{lj}} d\eta_{lj} \int_{P_{ki}} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\eta_{ki}.$$

In general, defining $d\boldsymbol{\eta}_k \equiv d\eta_{k1}\, d\eta_{k2}\, d\eta_{k3}$ and $d\boldsymbol{\eta}_l \equiv d\eta_{l1}\, d\eta_{l2}\, d\eta_{l3}$, and the domains of integration for $\boldsymbol{\eta}_k$ and $\boldsymbol{\eta}_l$ as P_k and P_l,

$$\int_{P_k} d\boldsymbol{\eta}_k \int_{P_l} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}_l = \int_{P_l} d\boldsymbol{\eta}_l \int_{P_k} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}_k.$$

Theorem III. [2, p. 217].

Let $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ satisfy the conditions of Theorems I and II and be continuous on P.

Consider the integral $I(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}, t)$,

$$I(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots \eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}, t) = \int_{P'} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}',$$

[1] Numbers in square brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

where $\boldsymbol{\eta}' \equiv \boldsymbol{\eta}_{k+1}, \boldsymbol{\eta}_{k-2}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_N$, and P' is the domain of integration on the set $\{\boldsymbol{\eta}'\} \subset P \subset \mathscr{P}$.

I is continuous on the set $P - P'$.

Theorem IV. [2, p. 219].

Let $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ satisfy the conditions of Theorems I—III. Let

$$I'(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots \eta_{k1}, \eta_{k2}, t) = \int_{P_{k3}} I(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots \eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}, t)\, d\eta_{k3},$$

with $I(\ldots)$ as defined in Theorem III.

Then if the partial derivatives $\partial I' \partial t$ and $\partial I \partial t$ exist, and $\partial I / \partial t$ is continuous in $(P - P') \times \{t\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} I' = \int_{P_{k3}} \frac{\partial}{\partial t} I(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots \eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}, t)\, d\eta_{k3},$$

if P_{k3} does not explicitly depend on t.

Also, if the partial derivatives $\partial I', \partial \eta_{li}$ and $\partial I\ \partial \eta_{lj}$ exist, and $\partial I / \partial \eta_{li}$ is continuous in $(P - P') \times \{t\}$,

$$\frac{\partial I'}{\partial \eta_{lj}} = \int_{P_{k3}} \frac{\partial}{\partial \eta_{lj}} I(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_l, \ldots, \eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}, t)\, d\eta_{k3},$$

if P_{k3} does not depend explicitly on η_{lj}.

Theorem V. [6].

If $f(\boldsymbol{\eta}, t)$ satisfies the conditions of theorems I to IV and in particular if I and I' satisfy the conditions of theorems III and IV for arbitrary k and l, then one may state as a generalization of Theorem IV,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{P'} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}' = \int_{P'} \frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}',$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} \int_{P'} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}' = \int_{P'} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_j} f(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}',$$

where $\boldsymbol{\eta}_j \notin \{\boldsymbol{\eta}'\}$ and P' is not an explicit function of t, and not a function of $\boldsymbol{\eta}_j$.

Theorem VI. [2, pp. 220, 325; 11, p. 210].

Let a point in the configuration space, $\{x\}$, be described by three CARTESIAN coordinates x_i, $(i = 1, 2, 3)$. Let R be the set of all points in configuration space $\{x\}$. Let $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{r}'$ be points in R.

Consider a vector $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ defined, bounded, and continuous on a closed domain $V \subset R$, where V is defined by $\boldsymbol{r}$. If $\partial \boldsymbol{F}\ \partial \boldsymbol{r}$ is continuous on V, then

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \int_{V(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}' = \int_{V(\boldsymbol{r})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}' - \int_{S_{\boldsymbol{r}}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},$$

where the dot, $\cdot$, refers to scalar product of vectors, and S_r is the set of all boundary points of the domain V, $S_r \subset V(r)$. The normal to the surface S_r is taken positive when directed towards the inside of V. *Theorem VII.* [2, p. 341].

Consider a vector $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}_{k\alpha})$, where $\boldsymbol{\eta}_{k\alpha}$ is a member of either $\{\boldsymbol{r}\}$ or $\{\boldsymbol{p}\}$. If $F(\boldsymbol{\eta}_{k\alpha})$ is continuous on the set of boundary points $S_{k\alpha} \subset P_{k\alpha}$ where $P_{k\alpha}$ is a closed subset of $\mathscr{P}_{k\alpha} = \{\boldsymbol{\eta}_{k\alpha}\}$, $\mathscr{P}_{k\alpha} \subset \mathscr{S}$ and $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}_{k\alpha})$ possesses continuous first order partial derivatives $\partial/\partial\boldsymbol{\eta}_{k\alpha} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}_{k\alpha})$ on the interior of $P_{k\alpha}$, then,

$$\int_{P_{k\alpha}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_{k\alpha}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}_{k\alpha})\, d\boldsymbol{\eta}_{k\alpha} = -\int_{S_{k\alpha}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}_{k\alpha}) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Consider a system of N particles whose properties are as yet unspecified. The state of this system may be specified in terms of the individual particle states. The latter are described in terms of variables corresponding to the generalized coordinates and generalized momenta (distinguished by the subscript i, $i = 1, 2, \ldots, s$) for each particle (identified by the subscript j, $j = 1, 2, \ldots, N$).

The phase space of sN dimensions in which all η_{ij} ($i = 1, \ldots s$; $j = 1, \ldots N$) are the coordinates is known as the γ-space and each system of N particles is represented in this space by a single point trajectory. An ensemble of N-particle system, Γ in number, is represented by a collection of Γ point trajectories in this phase space.

The phase space of s dimensions for a single particle is known as the particle phase space or the μ-space. Thus an N-particle system is represented by N points in μ-space. If all the particles are identical then the configuration in μ-space is unchanged by a simple interchange of two or more particles. The interchange does however cause a change of location of the point in γ-space. Since then there are $N!$ different arrangements in μ-space due to particle interchanging for a single μ-space configuration (and therefore a particular state of the system in classical mechanics) there are $N!$ γ-space points for a particular classical state or "cloud" of points in the μ-space.

Points representing separate members of an ensemble in the γ-space do not interact necessarily since they may represent isolated systems. μ-space points usually do interact, however, due to interparticle forces.

1.2. Classical Mechanics[2]

Consider a function, $F(\eta_{ij}, t)$, of the generalized coordinates and momenta, η_{ij}, and time, t. Then, it follows that

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij}, \tag{1.2.1}$$

where the dot refers to time differentiation.

[2] For a more detailed discussion see Chapter 2 of [15].

The cloud of points representing an ensemble in γ-space may be described by its local number density, which is defined as follows,

$$\varrho_c^{(N)}(\eta_{ij}, t) = \lim_{\Delta v \to 0} \left(\frac{\Delta N}{\Delta v} \right), \tag{1.2.2}$$

where ΔN is the number of points, or system, in the element of volume Δv of phase space at the point η_{ij} and time t. The limit above will always be assumed to exist so that $\varrho_c^{(N)}$ is a continuous point function in γ-space, and the systems in the ensemble are sufficiently numerous to give a continuum of such systems. From Eq. (1.2.1) then,

$$\frac{d\varrho_c^{(N)}}{dt} = \frac{\partial \varrho_c^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial \varrho_c^{(N)}}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij}. \tag{1.2.3}$$

Furthermore, if the number of systems in the ensemble is conserved, i.e., the ensemble density, $\varrho_c^{(N)}$, satisfies the continuity equation, one has

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_c^{(N)} + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial \eta_{ij}} (\varrho_c^{(N)} \dot{\eta}_{ij}) = 0. \tag{1.2.4}$$

Combining Eqs. (1.2.3) and (1.2.4),

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_c^{(N)} + \sum_{i,j} \frac{\partial \varrho_c^{(N)}}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} = - \varrho_c^{(N)} \sum_{i,j} \frac{\partial \dot{\eta}_{ij}}{\partial \eta_{ij}} = \frac{d\varrho_c^{(N)}}{dt}. \tag{1.2.5}$$

There exist two distinct subsets of the set of variables η_{ij} ($i = 1, \ldots s$; $j = 1, \ldots N$) which are uniquely related to each other, in classical mechanics, through HAMILTON's equations of motion. The two subsets will be denoted by $i = \alpha, \beta$. $\eta_{\alpha j}$ and $\eta_{\beta j}$ are, in fact, the coordinates and their conjugate momenta and obey the equations

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_{\alpha j}} = - \dot{\eta}_{\beta j}, \tag{1.2.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_{\beta j}} = \dot{\eta}_{\alpha j}, \tag{1.2.7}$$

where H is the total energy or HAMILTONIAN of the system expressed in terms of η_{ij}. The conjugate relation of $\eta_{\alpha j}$ and $\eta_{\beta j}$ then follows from Eqs. (1.2.6) and (1.2.7), i.e.,

$$\frac{\partial \dot{\eta}_{\alpha j}}{\partial \eta_{\alpha j}} + \frac{\partial \dot{\eta}_{\beta j}}{\partial \eta_{\beta j}} = 0. \tag{1.2.8}$$

In general, for $i = \alpha, \beta; \gamma, \delta; \ldots s$, all conjugate pairs α, β and γ, δ obey Eq. (1.2.8). As a consequence, when the terms from Eq. (1.2.8) are summed over all particles $j = 1, \ldots N$, the term,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \dot{\eta}_{ij}}{\partial \eta_{ij}} = 0, \tag{1.2.9}$$

drops out of Eq. (1.2.5) and one has LIOUVILLE's equation,

$$\frac{d\varrho_c^{(N)}}{dt} = \frac{\partial \varrho_c^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial \varrho_c^{(N)}}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} = 0. \tag{1.2.10}$$

The probability of finding a member of the ensemble in the volume element $\prod_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,N}} d\eta_{ij}$ in phase space is given by

$$\frac{\varrho_c^{(N)}}{\Gamma} \prod_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,N}} d\eta_{ij}. \tag{1.2.11}$$

However, as discussed in Sect. 1.1, this member of the ensemble corresponds to $N!$ different arrangements of the particles but with the same state description. Thus, one may define a new probability distribution function $f^{(N)} = f^{(N)}(\eta_{ij}, t)$ which gives the probability of finding the points η_{ij} in the volume element above, associated with the particles taken in any order, so that

$$f^{(N)} \prod_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,N}} d\eta_{ij} = N! \frac{\varrho_c^{(N)}}{\Gamma} \prod_{\substack{i=1,\ldots,s \\ j=1,\ldots,N}} d\eta_{ij}, \tag{1.2.12}$$

or

$$f^{(N)}(\eta_{ij}, t) = N! \frac{\varrho_c^{(N)}}{\Gamma}. \tag{1.2.13}$$

Furthermore, by substituting Eq. (1.2.13) into Eq. (1.2.10),

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} = 0. \tag{1.2.14}$$

1.3. Quantum Mechanics[3]

In classical mechanics the precise state of the system is given by the precise values of all η_{ij} $(i = 1, \ldots s; j = 1, \ldots N)$. Such information is inaccessible in quantum mechanics whose fundamentals are based on the indeterminacy principle, and here the points η_{ij} in γ-space do not represent information which may be so used directly to precisely define the state of the system. This implies that probability notions should be applied and the γ-space then may be used if probability functions are associated with the variables η_{ij} in place of their precise specification. In this way one has a convenient means to render similarity to the classical mechanics. Thus the variables η_{ij} are retained, but must be regarded as operators in quantum mechanics. Furthermore, a density matrix may be defined, to describe the ensemble of Γ systems in γ-space, which plays a role very similar to the classical ensemble density, ϱ_c, discussed in Sec. 1.2. The density matrix is now, however, defined in

[3] For a more detailed discussion see Chapter 2 of [15].

terms of the probability functions $\psi_c^{(N)}(\eta_\alpha, t)$ or wave functions of each member, k, of the N-particle system ensemble. The variable η_α refers to the generalized coordinates introduced in Sect. 1.2. If w_k is the statistical weight of each system in the ensemble the density matrix [16] is defined as

$$\varrho^{(N)}(\eta_\alpha'; \eta_\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\Gamma} w_k \psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha', t)\, \psi_k^{(N)}(\eta_\alpha, t). \tag{1.3.1}$$

In the classical mechanics, the time variation of ϱ_c was calculated in Sect. 1.2 by means of the equations of motion, i.e., Hamilton's equations. Similarly, the time variation of the density matrix must be calculated by means of the quantum mechanical equation of motion for the k-th N-particle system, i.e., Schrödinger's equation,

$$\mathscr{H}\, \psi_k^{(N)}(\eta_\alpha, t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_k^{(N)}(\eta_\alpha, t), \tag{1.3.2}$$

where $\mathscr{H}$ is the total energy operator, or Hamiltonian operator, of the N-particle system, and $\hbar = h/(2\pi)$, where h is Planck's constant. Eq. (1.3.2) together with its complex conjugate combines to give for the k-th system,

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha', t)\,\psi_k^{(N)}(\eta_\alpha, t) = \psi(\eta_\alpha', t)\mathscr{H}_{\eta\alpha}\psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha, t) -$$

$$-\psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha, t)\,\mathscr{H}_{\eta'\alpha}\psi_k^{(N)}(\eta_\alpha', t), \tag{1.3.3}$$

and for the ensemble Γ,

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\sum_k^{\Gamma} w_k \psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha', t)\,\psi_k^{(N)}(\eta_\alpha, t) = \mathscr{H}_{\eta\alpha}\sum_k^{\Gamma} w_k \psi_k^{(N)}(\eta_\alpha', t)\,\psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha, t) -$$

$$-\mathscr{H}^{*}_{\eta_\alpha'}\sum_k^{\Gamma} w_k \psi_k^{*(N)}(\eta_\alpha, t)\,\psi_k^{(N)}(\eta_\alpha', t), \tag{1.3.4}$$

i.e., from Eq. (1.3.1) it follows that

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\varrho^{(N)}(\eta_\alpha'; \eta_\alpha, t) = \mathscr{H}_{\eta_\alpha}\varrho^{(N)}(\eta_\alpha'; \eta_\alpha, t) - \mathscr{H}^{*}_{\eta_\alpha'}\varrho^{(N)}(\eta_\alpha; \eta_\alpha', t). \tag{1.3.5}$$

Equation (1.3.5) is the quantum analog of the Liouville equation, Eq. (1.2.10).

1.4. The Wigner Equation

A dynamic variable $\alpha(\eta_\alpha, t)$ is understood to be any function of the coordinates η_α of phase space [8, p. 26]. An observable is then defined as a real dynamic variable that is susceptible to measurement [8, p. 34]. In classical mechanics, the average value $\langle\alpha\rangle$ of an observable is derived

by means of the ensemble density $\varrho_c^{(N)}$ as the following "ensemble average" [15, p. 103],

$$\langle \alpha \rangle \equiv \langle \alpha; \varrho_c^{(N)} \rangle = \frac{1}{\Gamma} \int \alpha(\eta_{ij}, t)\, \varrho_c^{(N)}\, d\eta_{ij}, \tag{1.4.1}$$

where the integral has been normalized by the number of systems in the ensemble, Γ, and is understood to extend over all phase space accessible to the system. The ensemble density $\varrho_c^{(N)}$ is defined by Eq. (1.2.2) and obeys LIOUVILLE's equation, Eq. (1.2.10).

In quantum mechanics the density matrix, $\varrho^{(N)}$ of Eq. (1.3.1), may be used to derive average values of observables [15, p. 104], but no such operation as Eq. (1.4.1) utilizing $\varrho^{(N)}$ in place of $\varrho_c^{(N)}$ may be performed to calculate the average [15, p. 670]. Construction of a function from the density matrix, $\varrho^{(N)}$, which enables this operation for quantum ensembles to be made introduces certain formal advantages into the succeeding theory [16]. Such a function, $f_W^{(N)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$, may be constructed [25; 15, p. 670] by taking the FOURIER transform of the density matrix, i.e.,

$$f_W^{(N)} = \left(\frac{1}{\pi \hbar}\right)^{3N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2i}{\hbar} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}}\, \varrho^{(N)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r} + \boldsymbol{y}; t)\, d\boldsymbol{y}, \tag{1.4.2}$$

where $\eta_{\alpha j}$ and $\eta_{\beta j}$ of the γ-space have been replaced [cf. above Eq. (1.2.6)] by $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$ respectively. The function $f_W^{(N)}$ is known as WIGNER's distribution function, and it may be used to derive the average value of an observable, i.e., $\langle \alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}\, t) \rangle$ in a manner completely analogous to the classical case of Eq. (1.4.1). Thus

$$\langle \alpha \rangle \equiv \langle \alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t); f_W^{(N)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \rangle = \int\int \alpha(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\, f_W^{(N)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{p}. \tag{1.4.3}$$

In certain cases, this average has been interpreted by some authors [5; 15; 16] as a macroscopic observable, such as the macroscopic velocity, and the thermodynamic variables pressure and temperature.

In analogy to LIOUVILLE's equation, Eq. (1.2.14), which describes the variation of the classical distribution function, $f^{(N)}$, an equation for the WIGNER function, $f_W^{(N)}$, may be derived from the quantum analogue to LIOUVILLE's equation, i.e., from Eq. (1.3.5), by constructing the FOURIER transform of the latter equation [25]. The HAMILTONIAN operator, $\mathscr{H}$, of the system is given by,

$$\mathscr{H} = \mathscr{K} + \Phi; \quad \mathscr{K} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2 m_j} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j}\right), \tag{1.4.4}$$

where $\mathscr{K}$ and Φ are the kinetic and potential energy operators respectively, m_j is the mass of the jth particle and the dot denotes the scalar

product of the two vector derivatives $\partial/\partial \boldsymbol{r}_j$. The density matrix equation, Eq. (1.3.5), then becomes with Eq. (1.4.4),

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho^{(N)} = \frac{i}{\hbar}\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2\,m_j}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j'}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j'}\varrho^{(N)} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j}\varrho^{(N)}\right] + \right.$$
$$\left. + \Phi(\boldsymbol{r})\,\varrho^{(N)} - \Phi(\boldsymbol{r}')\,\varrho^{(N)}\right\}. \tag{1.4.5}$$

The FOURIER transform of Eq. (1.4.5) yields the equation for $f_W^{(N)}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}f_W^{(N)} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_j}{m_j}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j}f_W^{(N)} + \theta\cdot f_W^{(N)} = 0, \tag{1.4.6}$$

where the integral operator term is defined as

$$\theta\cdot f_W^{(N)} \equiv$$
$$\equiv \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{3N}\int\!\!\int\left[\Phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x})\right]e^{\frac{2i}{\hbar}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}}\,f_W^{(N)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}',t)\,d\boldsymbol{p}'\,d\boldsymbol{x}. \tag{1.4.7}$$

The equation (1.4.6) is known as WIGNER's equation.

1.5. Reduced Wigner Equation

The function $f_W^{(N)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},t)$ may be uniquely determined for any time, t_1, from its value at another time t_0 by means of WIGNER's equation, Eq. (1.4.6). The solution of this initial value problem, which is in $6N$-space time variables, is quite unmanageable in all but a small number of special cases. It is therefore desirable to seek a lower order description which may be defined as a description which requires a smaller number of independent variables than $6N+1$. This lower order description then implies use of a "reduced" distribution function which refers to small groups of particles or even a single particle. Such distribution functions[4] are constructed by integrating the function $f_W^{(N)}$ over the phase space accessible to all but the small group of particles under consideration. This process will be referred to as "reduction". For the time being, the entire procedure is treated purely formally and one is not interested in what particular properties the particles in the system possess.

Denoting the subset of particles $\{n\}$, $\{n\}\subset\{N\}$; and its complementary subset of particles in $\{N\}$ by $\{N-n\}$, one has by definition,

$$f_W^{(n)} = \int f_W^{(N)}\prod_{k\in\{N-n\}}d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{1.5.1}$$

where $\boldsymbol{\eta}_k \equiv \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{p}_k$ and the notation $k\in\{N-n\}$ implies that $k = n+1, n+2,\ldots,N$. The integration is understood to extend over all phase

[4] Henceforth "distribution function" will be abbreviated by "d.f."

space η_k, $k \in \{N-n\}$, accessible to the set of particles $\{N-n\}$. The WIGNER d.f., $f_W^{(N)}$, will be referred to a single particle species. This implies that the function $f_W^{(N)}$ is symmetric in the variables $\boldsymbol{\eta}_i$ or $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i$, and it is formally immaterial which subset $\{n\}$ is selected from the set $\{N\}$ provided that this single particle species is considered.

It is, however, necessary to take into account during the reduction, the interactions between any particles within the set $\{n\}$ and also interactions between the set $\{n\}$ and any particles of the set $\{N-n\}$. A particular example of this would be a "cluster" of n mutually interacting particles colliding, as a group, with single particles in the set $\{N-n\}$.

For any set of $\{n\}$ particles one has the following reduction [16] of WIGNER's equation, i.e., of Eq. (1.4.6).

The term $\theta \cdot f_W^{(N)}$ of Eq. (1.4.6) may be split into two summation terms if the potential Φ can be written as the sum of potentials φ and $\bar{U}$ which represent the external forces and internal or interparticle forces respectively. Then

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(\boldsymbol{r}_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{N} \sum_{j=2}^{N} \bar{U}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j), \tag{1.5.2}$$

where i and j refer to separate particles (hence the notation $i<j$, which also prohibits counting a pair of particles twice). Clearly $\bar{U}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$ for $i=j$ would be zero, since the particle is not considered to exert a force directly on itself. The term $\theta \cdot f_W^{(N)}$ may then be written by means of Eqs. (1.4.7) and (1.5.2) as

$$\theta \cdot f_W^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{N} \sum_{j=2}^{N} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)}, \tag{1.5.3}$$

where $\theta^{(e)}$ and θ_{ij} are the integral operators, of the form (1.4.7), corresponding to the external and internal potentials, φ, $\bar{U}$, respectively, as the latter are substituted for Φ from Eq. (1.5.2) into Eq. (1.4.7)

The WIGNER equation may now be reduced under those conditions in which the loss of particles through the boundary of phase space accessible to the particles is forbidden. Thus, from Eqs. (1.4.6, 7) and (1.5.1 to 3) one finds

$$\frac{\partial f_W^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(n)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(n)} =$$

$$= -\int \left[\sum_{i=n+1}^{N} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{N} \sum_{j=2}^{N} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \right] \Big/\!\!/_{k \in \{N-n\}} \, d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{1.5.4}$$

where the integral extends over all the phase space accessible to the set of particles $\{N-n\}$. The first term of the integral vanishes by integra-

tion over the momenta [16], and the second term of the integral may be written in terms of the following summations,

$$\int \sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{N}\sum_{j=2}^{N} \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n\}} d\boldsymbol{\eta}_k =$$

$$= \left[\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\sum_{j=2}^{n} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{N} + \sum_{\substack{i=n+1\\i<j}}^{N}\sum_{j=n+2}^{N}\right]\left[\int \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n\}} d\boldsymbol{\eta}_k\right]. \tag{1.5.5}$$

The first and second summation terms reduce as follows,

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\sum_{j=2}^{n} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{N}\right]\int \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n\}} d\boldsymbol{\eta}_k =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\sum_{j=2}^{n} \theta_{ij}\cdot f_W^{(n)} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{J=n+1}^{N} \int \theta_{iJ}\cdot f_W^{(n+1)}\, d\boldsymbol{\eta}_J, \tag{1.5.6}$$

whilst the third summation term vanishes by integration over the momenta as before, [16]. From Eqs. (1.5.5) and (1.5.6), Eq. (1.5.4) becomes

$$\frac{\partial f_W^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} f_W^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \theta_i^{(e)}\cdot f_W^{(n)} =$$

$$= -\left[\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\sum_{j=2}^{n} \theta_{ij}\cdot f_W^{(n)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{J=N+1}^{N} \int\int \theta_{iJ}\cdot f_W^{(n+1)}\, d\boldsymbol{r}_J\, d\boldsymbol{p}_J\right]. \tag{1.5.7}$$

Eq. (1.5.7) is then the final form of the reduced n-particle WIGNER equation. As indicated previously, the equation may be used both to describe the behaviour of a set of any n particles in the system of N particles, or in particular a cluster of n particles which collides with single particles at any one time. In the case in which the n-particle cluster does not interact with any other particles in the time t_1 to t_2, say, the motion of the cluster is described during the interval $(t_2 - t_1)$ by the following equation, which is simply Eq. (1.5.7) less the term involving the set $\{N - n\}$, (or $J = n + 1, \ldots N$), i.e.,

$$\frac{\partial f_W^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial f_W^{(n)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \theta_i^{(e)}\cdot f_W^{(n)} = -\sum_{\substack{i=1\\i<j}}^{n}\sum_{j=2}^{n} \theta_{ij}\cdot f_W^{(n)}, \tag{1.5.8}$$

which, since only $f_W^{(n)}$ appears, is a determined equation for $f_W^{(n)}$.

The simplest case when collisions do occur is that in which only two particles collide at any one time, i.e., only binary collisions do occur. This case may be investigated by Eq. (1.5.7) with $n = 1$, i.e.,

$$\frac{\partial f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot f_W^{(1)} =$$

$$= - \sum_{J \in \{N-1\}} \int\int \theta_{1J} \cdot f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\, d\boldsymbol{r}_J\, d\boldsymbol{p}_J, \qquad (1.5.9)$$

where $J \in \{N-1\}$ means $J = 2, 3, \ldots N$, and the first term on the R.H.S.[5] of Eq. (1.5.7) has dropped out since one has the condition $\theta_{ij} = 0$ for $i = j$ [see considerations below Eq. (1.5.2)].

Since $f_W^{(2)}$ appears in addition to $f_W^{(1)}$ in the above equation, the evolution of $f_W^{(1)}$ is not determinable from initial data unless $f_W^{(2)}$ is specified. One way of specifying $f_W^{(2)}$ is to reduce the integral on the R.H.S. of Eq. (1.5.9) to one in terms of $f_W^{(1)}$ only, thus resulting in an equation involving $f_W^{(1)}$ alone. The derivation of a determined equation for $f_W^{(1)}$ in this manner is treated in the next chapter.

2. Equations for the Single Particle Distribution Function

2.1. General Remarks

The problem of introducing $f_W^{(1)}$ in place of $f_W^{(2)}$ in Eq. (1.5.9) is intimately linked to the concept of irreversibility, in that the equation involving $f_W^{(1)}$ only must describe the almost universal tendency for a system to proceed from a given state towards a steady non-equilibrium state, or in particular towards an equilibrium state, in a unidirectional manner [9, 10]. No general hypothesis has yet been constructed by which the integral on the R.H.S. of Eq. (1.5.7) may be reduced to one involving only $f_W^{(n)}$, and in particular an integral involving only $f_W^{(1)}$ on the R.H.S of Eq. (1.5.9), and which is in full accord with the principle of irreversibility. The search for such a general hypothesis merits a separate and full discussion which will not be included in this paper since the concept of irreversibility will not be discussed. Various limited hypotheses which might be in accord with the concept of irreversibility have been advanced in the literature, including "molecular chaos" [10, 11, 17] "one-sided molecular chaos", [11] and "coarse-graining" or "smoothing" [9, 17] (which involve either averaging the distribution functions over phase space or over periods of time or both). Of these, the hypothesis of "one-sided molecular chaos", which states that the dynamics of two particles are completely independent prior to their collision with each other, will be used to reduce Eq. (1.5.9) to an equation involving only $f_W^{(1)}$ in Sect. 2.4. Prior to this analysis, however, the most general previous attempt to derive a determined equation for $f_W^{(1)}$ from

[5] R.H.S.: Right hand side of equality sign.

Eq. (1.5.9) will be outlined in the following section, Sect. 2.2, for purposes of comparison and evaluation. It is, further, desirable to analyse in detail the classical mechanical case in order to provide a foundation for development of the quantum mechanical case given in Sect. 2.4. The classical case will be analysed in Sect. 2.3, and it is found to result in an alternative reduction procedure which it is believed is more conceptually correct than those procedures more widely used in reducing either Liouville's equation or Wigner's equation.

2.2. Time Average Reduction. Ross and Kirkwood Approach

In this section the analysis of Ross and Kirkwood [21] will be outlined. The reduction procedure for the N-particle Wigner equation, which was given in Sect. 1.4 and forms the basis for the Ross-Kirkwood analysis, led, it will be recalled, to the following equation, i.e., Eq. (1.5.9),

$$\frac{\partial f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot f_W^{(1)} = = - \sum_{J \in \{N-1\}} \int\int \theta_{1J} \cdot f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\, d\boldsymbol{r}_J\, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.2.1}$$

It is now necessary, as discussed in Sect. 2.1, to reduce the term on the R.H.S. of the above equation by replacing f_W^2 by f_W^1 in some manner. This was done, by the authors[6], in two steps: the first requires a coarse-graining in time of the d.f.'s and thus of each term in Eq. (2.2.1), and the second requires the assumption that the correlation of $f_W^1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$ and $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_J, t)$, i.e., the d.f.'s referring to the two interacting particles, 1 and J, in Eq. (2.2.1), becomes negligible for sufficiently large times after their interaction or collision. It is the second step that according to Ross and Kirkwood is linked to the concept of molecular chaos.

Consider first the time averaging. This was used in deference to its claimed necessity for the classical case. In the latter it was claimed by Kirkwood [17] that since any observation of the system is of finite time (or space) resolution, a "coarse-graining" in time is necessary in order to yield an observationally meaningful d.f. Thus the average is formed for a period which is large in the microscopic sense but still small macroscopically. The precise quantitative period was left undetermined. The coarse-grained d.f. may be defined as follows:

$$\bar{f}_W^{(N)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f_W^{(N)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}; t + s)\, ds. \tag{2.2.2}$$

The time average of the R.H.S. of Eq. (2.2.1) may then be written

$$\sum_{J \in \{N-1\}} \frac{1}{\tau} \int\int d\boldsymbol{r}_J\, d\boldsymbol{p}_J \int_0^{\tau} \theta_{1J} \cdot f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J; t + s)\, ds. \tag{2.2.3}$$

[6] The authors refer in this section to Ross and Kirkwood.

The authors find it convenient to introduce now the phase space transformation functions [19], $K^{(n)}$, which are defined as the kernel of the following equation,

$$f_W^{(n)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}; t+s) = \int\int K^{(n)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}'; s)\, f_W^{(n)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}'; t)\, d\boldsymbol{r}'\, d\boldsymbol{p}', \qquad (2.2.4)$$

where $f_W^{(n)}$ is given by Eq. (1.5.1), and $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ refer to the set of particles $\{n\}$. The advantage of using $K^{(n)}$ is that initial conditions may be prescribed for $K^{(n)}$ so that it may be determined from the initial value problem. The equation for $K^{(n)}$ is obtained by substitution of Eq. (2.2.4) in Eq. (1.5.8), the latter equation being used if collisions of the group $\{n\}$ with any other particles may be neglected. In particular for a binary collision, in which no third particle interferes, one has from the above substitution with $n = 2$,

$$\frac{\partial K^{(2)}}{\partial s} + \sum_{k=1,2} \frac{\boldsymbol{p}_k}{m_k} \cdot \frac{\partial K^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}_k} + \theta \cdot K^2 = 0, \qquad (2.2.5)$$

where $\theta_i^{(e)}$ and θ_{ij} of Eq. (1.5.8) have been combined from Eq. (1.5.3) in the single term $\theta \cdot K^{(2)}$. The initial condition on $K^{(2)}$ is given in terms of the DIRAC delta function, δ, as

$$K^2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}'; s) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'), \qquad \text{at} \qquad s = 0. \qquad (2.2.6)$$

Thus $K^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}'; s)$, where $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ now refer to the two particles 1 and J undergoing collision, may be determined by Eqs. (2.2.5) with (2.2.6). The term (2.2.3) may now be written as

$$-\sum_{J \in \{N-1\}} \frac{1}{\tau} \int\int d\boldsymbol{r}_J\, d\boldsymbol{p}_J \int\int d\boldsymbol{r}'\, d\boldsymbol{p}' \int_0^\tau \theta_{1J} \cdot K^2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}'; s)\, f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}'; t)\, ds, \qquad (2.2.7)$$

by substituting Eq. (2.2.4) with $n = 2$ into Eq. (2.2.3), and where $K^{(2)}$ is considered to be determined from above.

The second step in the reduction of the integral in Eq. (2.2.1) is the assumption concerning the correlation of the two particles, 1 and J. The d.f., $f_W^{(2)}$, is written in terms of the single particle d.f. 's, $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$ and $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_J, t)$, for the two particles as follows,

$$f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J; t) =$$
$$= [1 + \vartheta(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J; t)]\, [\textcircled{1}_{\pm}]\, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_J, t), \qquad (2.2.8)$$

where $[\textcircled{1}_{\pm}]$ is a quantum mechanical symmetry operator expressing the effect of the type of statistics obeyed by the two interacting particles. This operator is discussed in Appendix A. It is the vanishing of the integral containing this function, for large τ, as obtained by substituting Eq. (2.2.8) in (2.2.3), that is referred to by the authors as the vanishing correlation of $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$ and $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_J, t)$ or of the motion of the two particles.

In their analysis, the authors return to the term (2.2.3) and substitute the expression for $f_W^{(2)}$ given by Eq. (2.2.8) in the term (2.2.3), rather than using the expression for $f_W^{(2)}$ from Eq. (2.2.8) in the term (2.2.7). Thus from (2.2.3) and Eq. (2.2.8) the term on the R.H.S. of Eq. (2.2.1) becomes with time averaging,

$$-\sum_{J\in\{N-1\}}\frac{1}{\tau}\Big[\int\int d\boldsymbol{r}_J\,d\boldsymbol{p}_J\int_0^\tau \theta_{1J}\cdot\left(1+\vartheta(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_J,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_J;t-s)\right)\times$$

$$\times\,[\textcircled{1}_{\pm}]\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{p}_1,t+s)\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J,\boldsymbol{p}_J,t+s)\,ds\Big]. \qquad (2.2.9)$$

Expanding the above expression into two integral terms, one involving ϑ and the other not involving ϑ, the term including the correlation function, ϑ, is

$$-\sum_{J\in\{N-1\}}\frac{1}{\tau}\Big[\int\int d\boldsymbol{r}_J\,d\boldsymbol{p}_J\int_0^\tau \theta_{1J}\cdot\vartheta\,[\textcircled{1}_{\pm}]\cdot$$

$$\cdot\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{p}_1,t+s)\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J,\boldsymbol{p}_J,t+s)\,ds\Big], \qquad (2.2.10)$$

where the expression inside the square brackets is called the correlation integral. The authors assume that the correlation integral of (2.2.10) is bounded and of the order τ_k. Then for sufficiently large times the contribution of the term (2.2.10), i.e., $\tau_k \tau$, in (2.2.9) becomes negligible. It is claimed by the authors that the bound, τ_k, on the correlation integral is a result of the assumption that the deviation of $(1+\vartheta)$ from unity is a short range function of the interparticle force. With the above assumptions, the term (2.2.9) reduces to

$$-\sum_{J\in\{N-1\}}\frac{1}{\tau}\int\int d\boldsymbol{r}_J\,d\boldsymbol{p}_J\int_0^\tau \theta_{1J}\cdot\,[\textcircled{1}_{\pm}]\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{p}_1,t-s)\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J,\boldsymbol{p}_J,t-s)\,ds. \qquad (2.2.11)$$

The authors then introduce the phase transformation function, $K^{(2)}$, of Eq. (2.2.4) with $n=2$. The transformation function, $K^{(2)}$, is however defined in terms of $f_W^{(2)}$ and not $f_W^{(1)}$ or products of $f_W^{(1)}$. Nevertheless, the authors introduce $K^{(2)}$ into (2.2.11) thus,

$$-\sum_{J\in\{N-1\}}\frac{1}{\tau}\int\int d\boldsymbol{r}_J\,d\boldsymbol{p}_J\int\cdots\int_0^\tau \theta_{1J}\cdot$$

$$\cdot\,[K^2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_J,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_J|\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{r}_J',\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_J';s)]\times$$

$$\times\,[\textcircled{1}_{\pm}]\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{p}_1',t)\,f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J',\boldsymbol{p}_J',t)\,d\boldsymbol{r}_1'\,d\boldsymbol{r}_J'\,d\boldsymbol{p}_1'\,d\boldsymbol{p}_J'\,ds. \qquad (2.2.12)$$

It seems that the new derivation of (2.2.12) from (2.2.3) as given immediately below possesses more merits in its rigour than the derivation of the authors just given above. It was the apparent intention of Ross and Kirkwood in their original introduction of $K^{(n)}$ by Eq. (2.2.4), to perform the time averaging in (2.2.3) on the phase space transformation function, $K^{(2)}$, rather than on $f_W^{(2)}$. The more formal procedure would be to introduce the function $K^{(2)}$ from Eq. (2.2.4), with $n = 2$, immediately into (2.2.3), since $K^{(2)}$ is defined by Eq. (2.2.4) only in terms of $f_W^{(2)}$. Furthermore, it would appear that such a substitution is the only valid procedure, rather than introducing $K^{(2)}$ after time averaging has been employed to remove the dependency of the expression (2.2.9) on the correlation function, ϑ. Thus, introducing $K^{(2)}$ from Eq. (2.2.4) into (2.2.3), one has

$$- \sum_{J \in \{n-1\}} \frac{1}{\tau} \int\int d\boldsymbol{r}_J \, d\boldsymbol{p}_J \int \cdots \int_0^\tau \theta_{1J} \cdot$$
$$\cdot K^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J | \boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'; s) \times$$
$$\times f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'; t) \, d\boldsymbol{r}_1' \, d\boldsymbol{r}_J' \, d\boldsymbol{p}_1' \, d\boldsymbol{p}_J' \, ds. \qquad (2.2.13)$$

The single particle d.f. 's may now be introduced in (2.2.13) by substituting for $f_W^{(2)}$ in (2.2.13) from Eq. (2.2.8), i.e.,

$$- \sum_{J \in \{N-1\}} \frac{1}{\tau} \int\int d\boldsymbol{r}_J \, d\boldsymbol{p}_J \int \cdots \int_0^\tau \theta_{1J} \cdot$$
$$\cdot K^{(2)}(\ldots, s) \, [1 + \vartheta(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t)] \times$$
$$\times [\textcircled{1}_{\mp}] \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{p}_1', t) \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_J', t) \, d\boldsymbol{r}_1' \, d\boldsymbol{p}_1' \, d\boldsymbol{r}_J' \, d\boldsymbol{p}_J' \, ds. \qquad (2.2.14)$$

Since it is clear from (2.2.14) that ϑ is not a function of s, then ϑ, is not involved in the integration over s, there is no means by which the integral term involving the correlation function, ϑ, in Eq. (2.2.14) may be made to vanish [in order to find the same result as (2.2.12)] other than assuming that the correlation function is negligible for *any* time, t. If this is assumed, then one has from (2.2.14), with $\vartheta = 0$,

$$- \sum_{J \in \{N-1\}} \frac{1}{\tau} \int\int d\boldsymbol{r}_J d\boldsymbol{p}_J \int \cdots \int_0^\tau \theta_{1J} \cdot$$
$$\cdot K^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J | \boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'; s) \times$$
$$\times [\textcircled{1}_{\pm}] \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{p}_1', t) \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_J', t) \, d\boldsymbol{r}_1' \, d\boldsymbol{r}_J' \, d\boldsymbol{p}_1' \, d\boldsymbol{p}_J' \, ds, \qquad (2.2.15)$$

a result which is identical to (2.2.12).

In view of the difference of assumptions concerning the behaviour of ϑ in order to get either (2.2.12) or (2.2.15) from (2.2.3), there would appear to exist as yet unresolved conceptual difficulties in the unequivocable introduction of the fundamental concept of molecular chaos.

See remarks below Eq. (2.2.1). In the next sections, Sects. 2.3 and 2.4, an attempt will be made, however, to remove this difficulty.

Proceeding with ROSS and KIRKWOOD's analysis from Eq. (2.2.1) as it is time averaged, with the R.H.S. given by (2.2.3) and subsequently (2.2.12), one has

$$\frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot \bar{f}_W^{(1)} =$$

$$= - \sum_{J \in \{N-1\}} \frac{1}{\tau} \int\int d\boldsymbol{r}_J \, d\boldsymbol{p}_J \int \dots \int_0^\tau \theta_{1J} \cdot$$

$$K^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J | \boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'; s) \times$$

$$\times [\bigcirc_{-s}] f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{p}_1', t) \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_J', t) \, d\boldsymbol{r}_1' \, d\boldsymbol{r}_J' \, d\boldsymbol{p}_1' \, d\boldsymbol{p}_J' \, ds. \qquad (2.2.16)$$

The BORN approximation is used by ROSS and KIRKWOOD to solve the equation for $K^{(2)}$, i.e., Eq. (2.2.5) with initial condition (2.2.6), and after "laborious calculation", including a transformation of coordinates to the center of mass system, one finds the following equation from Eq. (2.2.16),

$$\frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot \bar{f}_W^{(1)} =$$

$$= - \sum_{J \in \{N-1\}} \int\int \sigma(p, \Omega) \frac{p}{m_c} [f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1'; t) \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J'; t)$$

$$- f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1; t) \, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J; t)] \, d\Omega \, d\boldsymbol{p}_J, \qquad (2.2.17)$$

where

$$\sigma(p, \Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_c}{2\pi\hbar^2} \right)^2 [I(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \pm I(-\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')]^2;$$

$$|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'| = 2p \sin \theta/2, \qquad (2.2.18)$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_J - \boldsymbol{p}_1); \qquad \boldsymbol{p}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_J' - \boldsymbol{p}_1'), \qquad (2.2.19)$$

$$\frac{1}{m_c} = \frac{1}{m_J} + \frac{1}{m_1}, \qquad (2.2.20)$$

$$I(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') = \int \exp\left| \frac{i}{\hbar} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \cdot \boldsymbol{r} \right| U(\boldsymbol{r}) \, d\boldsymbol{r}, \qquad (2.2.21)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_1, \qquad (2.2.22)$$

and Ω and θ are the solid and polar angles in the centre of mass coordinates, with polar axis along $\boldsymbol{p}'$.

The conditions for derivation of Eq. (2.2.17) from (2.2.16) are as follows:

a) The d.f. 's have only macroscopic space dependence, i.e., variations in d.f. 's occur only for distances L_1 such that $L_1 \gg L_\tau$ where L_τ

is the distance traversed by a classical particle with same initial momentum as in the quantum mechanical case during the interval τ.

b) The interparticle forces are short range, such that their range $\ll L_\tau$.

c) The scattering problem, i.e., evaluation of collision cross section, Eq. (2.2.18), is solved by perturbation theory: i.e., the perturbation of the HAMILTONIAN during collision is assumed to be small.

It will be noted that the d.f. 's on the R.H.S. of Eq. (2.2.17) are not coarse-grained. A further time averaging is made, and with the introduction of the further condition,

$$f_W^{(1)} f_W^{(1)} = \bar{f}_W^{(1)} \bar{f}_W^{(1)}, \tag{2.2.23}$$

the final equation becomes

$$\frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot \bar{f}_W^{(1)} =$$

$$= - \sum_{J \in \{N-1\}} \int\int \sigma(p, \Omega) \frac{p}{m_c} [\overline{f_W^{(1)}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1'; t)\, \overline{f_W^{(1)}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J', t) -$$

$$- \bar{f}_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1; t)\, \bar{f}_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J, t)]\, d\Omega\, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.2.24}$$

If the external forces vary sufficiently slowly, the term $\theta_1^{(e)} \cdot \bar{f}_W^{(1)}$ simplifies to

$$\theta_1^{(e)} \cdot \bar{f}_W^{(1)} \to - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \varphi(\boldsymbol{r}_1) \cdot \frac{\partial \bar{f}_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1}, \tag{2.2.25}$$

and the equation reduces to the UEHLING-UHLENBECK [23] equation, if the d.f. $f_W^{(1)}$ is replaced by the classical d.f. $f^{(1)}$, without the density dependent quantum statistical factors, the latter's being ignored in ROSS-KIRKWOOD's analysis. MORI and ONO [18] have derived the above equation, Eq. (2.2.24), and included the statistical factors by the method of second quantization. Their analysis is, however, less general than ROSS and KIRKWOOD's; in particular the d.f. is allowed no spatial variation.

A summary of the conditions imposed by the ROSS-KIRKWOOD analysis is given below.

Summary of Conditions imposed in the derivation of Eq. (2.2.24).

i) Two particle collisions, or interactions, only.

ii) Forces on particles are representable by scalar potentials and which may be split into external and internal or interparticle forces.

iii) Coarse-graining or time average over a period τ which is quantitatively undefined, but much larger than a collision period; the period τ is determined by the necessity for the correlation integral to become insignificant.

iv) BORN approximation is invoked in order to solve equation for phase space transformation function, K.

v) Conditions a, b, c, below Eq. (2.2.22).

2.3. The Truncated Classical Distribution Function

2.3.1. *Preliminary Remarks*

A reduction procedure for Liouville's equation will be introduced in this section which will later serve as the basis for a reduction of Wigner's equation alternative to that procedure discussed in Sects. 1.5 and 2.2. In this alternative procedure, the reduction integral of Eq. (1.5.1) is modified in that the domain of integration does not cover all the phase space accessible to the set of particles $\{N - n\}$. The restricted domain of integration will be denoted by D, and in view of the exclusion of a certain part of the phase space or a truncation of the latter, the new distribution function will be referred to as the truncated distribution function and denoted by the superscript, "T". Thus [c.f. Eq. (1.5.1)],

$$ {}^{T}f_W^{(n)} = \int_D f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{2.3.1.1}$$

It is clear that in view of the limited domain of integration for ${}^{T}f_W^{(n)}$, the latter is not identical to the d.f. defined in Eq. (1.5.1), i.e., to

$$ f_W^{(n)} = \int f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{2.3.1.2}$$

where the domain of integration extends over all the region of phase space accessible to the set of particles $\{N - n\}$. However, one has

$$ {}^{T}f_W^{(n)} = f_W^{(n)}, \qquad \boldsymbol{\eta}_k \in D, \tag{2.3.1.3}$$

but

$$ {}^{T}f_W^{(n)} \neq f_W^{(n)}, \qquad \boldsymbol{\eta}_k \in \bar{D}, \tag{2.3.1.4}$$

where $\bar{D}$ is the complement of D in the phase space accessible to the particles in the system.

Before consideration of the reduction of Wigner's equation for the truncated d.f., ${}^{T}f_W^{(n)}$, which will follow in Sect. 2.4, the classical mechanical case will be investigated in which the analogous truncated classical distribution functions appear.

In order to clarify the basis of motivation for an analysis in terms of truncated d.f.'s, it is desirable to consider first the elementary, or so-called physical, derivation of Boltzmann's equation. In this derivation, Sect. 2.3.2, the single particle d.f.'s, $f^{(1)}$, are used ab initio and exclusively. Following this derivation, the reduction procedure from Liouville's equation will be given in Sect. 2.3.3.

2.3.2. *Elementary Derivation of Boltzmann Equation*

The d.f., $f^{(N)}$, is defined by Eq. (1.2.12). The significance of $f^{(N)}$ is that $f^{(N)} \prod_{k\in\{N\}} d\boldsymbol{\eta}_k$ is the probability of finding phase points $\boldsymbol{\eta}_k$, $(k = 1,\ldots,N)$, associated with the particles taken in any order in the volume elements $d\boldsymbol{\eta}_1, d\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,d\boldsymbol{\eta}_N$. In order to derive the probability d.f. for any single particle in the system from $f^{(N)}$ it is necessary to

calculate the simultaneous total probability of finding all the other $(N-1)$ particles in the system anywhere in the phase space accessible to the system. This may be done by integrating $f^{(N)}$ over all phase space, accessible to the system, with respect to the phase points $\boldsymbol{\eta}_k$ of all particles but the single one considered. This integral will be denoted by $f^{(1)}$ and is given by

$$f^{(1)} = \int f^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{2.3.2.1}$$

where the integral is of a definite character.

In the above definition of $f^{(1)}$ the notion of interparticle interactions is included, and $f^{(1)}$ has been defined at all points in the phase space accessible to the single particle.

The significance of $f^{(1)}$ is that $f^{(1)}\, d\boldsymbol{\eta}_1$ is the probability of finding the single particle in $d\boldsymbol{\eta}_1$ about the point $\boldsymbol{\eta}_1$.

Proceeding now with the derivation[7] of BOLTZMANN's equation, consider the time variation of the d.f., $f^{(1)} = f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, t)$. In the absence of collisions both at time t and in the interval dt from t to $t + dt$, the number of phase points $Nf^{(1)}(\boldsymbol{\eta}, t)\, d\boldsymbol{\eta}_1$ in a volume element $d\boldsymbol{\eta}_1$ at a point $\boldsymbol{\eta}_1$ at time t in the μ-space moves into an element $d\boldsymbol{\eta}_1$ at $\boldsymbol{\eta}_1 + d\boldsymbol{\eta}_1'$ at time $t + dt$, where

$$d\boldsymbol{\eta}_1' \equiv d\boldsymbol{r}_1', d\boldsymbol{p}_1', \tag{2.3.2.2}$$

and

$$d\boldsymbol{r}_1' = \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} dt, \qquad d\boldsymbol{p}_1' = \boldsymbol{X}_1^{(e)}\, dt, \tag{2.3.2.3}$$

where $\boldsymbol{X}_1^{(e)}$ is the external force acting on the particle. Only external forces act on the particle when it is not in collision or interaction with any other particle. Since, then, collisions have not been allowed,

$$N f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, t)\, d\boldsymbol{\eta}_1 = N f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1 + d\boldsymbol{\eta}_1', t + dt)\, d\boldsymbol{\eta}_1. \tag{2.3.2.4}$$

If collisions do occur in the system, however, the restriction in the analysis so far implies that the d.f., $f^{(1)}$, as used in Eq. (2.3.2.4), and referring to non-interacting particles, is not identical to the d.f. defined in Eq. (2.3.2.1). In anticipation of the interpretation of the truncated d.f., which was briefly discussed in Sect. 2.3.1, the d.f. of Eq. (2.3.2.4) will be distinguished by the superscript "T". The interpretation of the latter d.f. as a truncated d.f. will be clarified in Sect. 2.3.3.

Consider any two particles denoted by 1 and J. If the interparticle forces are spherically symmetric and are of finite range ξ_0, a collision between the two particles occurs whenever

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_J| < \xi_0, \tag{2.3.2.5}$$

i.e., whenever one particle is within the other's sphere of interaction of radius ξ_0.

[7] The derivation given here closely parallels the standard ones given by GRAD [10], H.C.B. [15, p. 444] or CHAPMAN and COWLING [7, p. 46]. The limitation of the definition of $f^{(1)}$ to ${}^{T}f^{(1)}$ is not however found in these texts [see Eq. (2.3.2.6)].

Since ${}^{T}f^{(1)}$ refers to particles not interacting or undergoing collision, one may say that

$$ {}^{T}f^{(1)} \equiv f^{(1)} \qquad \text{when} \qquad |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_J| \geqslant \xi_0, \tag{2.3.2.6} $$

where $\boldsymbol{r}_J$ refers to any other particle in the system, and

$$ {}^{T}f^{(1)} \text{ is undefined for} \qquad |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_J| < \xi_0. \tag{2.3.2.7} $$

However, $f^{(1)}$ of Eq. (2.3.2.1) is, of course, defined in $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_J < \xi_0$. In the previous elementary derivations of BOLTZMANN's equation, the formal distinction between $f^{(1)}$ and ${}^{T}f^{(1)}$ as expressed in (2.3.2.6) and (2.3.2.7) has not been taken into account, but rather the domain of interaction, i.e., $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_J| < \xi_0$ has been implicitly assumed to be negligibly small (see later discussion, Sect. 3.1).

In general, collisions naturally do occur, and not all phase points originally at $\boldsymbol{\eta}_1$ at time t arrive at $\boldsymbol{\eta}_1 - d\boldsymbol{\eta}_1'$ at time $t - dt$, where $d\boldsymbol{\eta}_1'$ is defined by Eqs. (2.3.2.2) and (2.3.2.3). Due to collisions, also, phase points arrive at $\boldsymbol{\eta}_1 - d\boldsymbol{\eta}_1'$ at time $t - dt$ although they did not start at $\boldsymbol{\eta}_1$ at time t. The number of "departures" and "arrivals" at $\boldsymbol{\eta}_1$ and $\boldsymbol{\eta}_1 + d\boldsymbol{\eta}_1'$ must therefore be corrected from those given simply by the terms of Eq. (2.3.2.4). If the probable number of particles lost, from those originating in $d\boldsymbol{\eta}_1$ at $\boldsymbol{\eta}_1$, by subsequent collision during the time dt, is denoted by $\Gamma^{(-)} d\boldsymbol{\eta}_1\, dt$ and those gained at $\boldsymbol{\eta}_1 - d\boldsymbol{\eta}_1'$ by previous collision during dt is denoted by $\Gamma^{(+)} d\boldsymbol{\eta}_1\, dt$, one then has in place of Eq. (2.3.2.4),

$$ N\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1 + d\boldsymbol{\eta}_1', t - dt)\, d\boldsymbol{\eta}_1 - N\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, t)\, d\boldsymbol{\eta}_1 = (\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)})\, d\boldsymbol{\eta}_1\, dt. \tag{2.3.2.8} $$

Expanding the first term in a TAYLOR's series, one has, neglecting all but the first terms in the expansion,

$$ {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1 + d\boldsymbol{\eta}_1', t + dt)\, d\boldsymbol{\eta}_1 = \left[{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, t) + \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1} d\boldsymbol{\eta}_1' + \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} dt \right] d\boldsymbol{\eta}_1, \tag{2.3.2.9} $$

where

$$ \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1} d\boldsymbol{\eta}_1' = \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} d\boldsymbol{r}_1' + \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} d\boldsymbol{p}_1'. \tag{2.3.2.10} $$

From Eq. (2.3.2.3), Eq. (2.3.2.10) may be written,

$$ \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1} d\boldsymbol{\eta}_1' = \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} dt + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} dt, \tag{2.3.2.11} $$

so that, substituting Eq. (2.3.2.11) in Eq. (2.3.2.9),

$$ {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1 + d\boldsymbol{\eta}_1', t + dt)\, d\boldsymbol{\eta}_1 - {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, t)\, d\boldsymbol{\eta}_1 = \left[\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{\eta}_1, t) + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right] d\boldsymbol{\eta}_1\, dt. \tag{2.3.2.12} $$

Substituting Eq. (2.3.2.12) in Eq. (2.3.2.8), the latter equation becomes

$$ N \left[\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right] = \Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}. \tag{2.3.2.13} $$

One must now consider the collision process [10, p. 338] in order to evaluate the terms $\Gamma^{(+)}$ and $\Gamma^{(-)}$. Under the assumption of binary collisions, Eq. (2.3.2.13) will then yield the BOLTZMANN equation.

Consider a particle at $\boldsymbol{r}_1$ with momentum $\boldsymbol{p}_1$ at time t. In the absence of any collision this particle moves to the point $\boldsymbol{r}_1 + d\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{p}_1/m_1)\,dt$ at time $t + dt$. The probable number of particles starting toward $\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{p}_1/m_1)\,dt$ from $\boldsymbol{r}_1$ is given by the d.f. referring to particles not undergoing collision at time t, i.e., $N\,{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$. The particle may however suffer a collision en route to $\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{p}_1/m_1)\,dt$ from $\boldsymbol{r}_1$, say at time $t + \delta t$, $\delta t < dt$. The probability for such a collision to take place is simply given by the probability that another particle intercepts the sphere of interaction of the first particle during the interval dt, i.e., at $t + \delta t$, $\delta t < dt$.

Without discussing the details [10, p. 338] of the collision dynamics, consider a second particle trajectory (relative to the motion of the first particle) which intercepts the surface of the interaction sphere with a relative velocity $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{p}_2/m_2 - \boldsymbol{p}_1/m_1$. The diametral plane perpendicular to this relative velocity vector may be described by the plane polar coordinates ξ and ε, where its periphery is given by $\xi = \xi_0$ [c.f. Eq. (2.3.2.6)]. The probability of this intercept approach toward the diametral plane element $d\omega = \xi\,d\xi\,d\varepsilon$ during the interval dt is then given by the free particle d.f., ${}^{T}f^{(1)}$, in a cylinder of length $|\boldsymbol{U}|\,dt$ perpendicular to the element $d\omega$ and outside the sphere of interaction. It is clear that this cylinder (of volume $|\boldsymbol{U}|dt\,d\omega$) moves, adjacent to the sphere and relative to the coordinate system $\boldsymbol{r}$, from a position close to $\boldsymbol{r}_1$ toward a position $\boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{p}_1/m_1)\,dt$. It is therefore necessary to assume that ${}^{T}f^{(1)}$ is constant in the volume swept out by the cylinder during the interval dt. This assumption for ${}^{T}f^{(1)}$ is referred to as "slowly varying d.f.".

The probability d.f., ${}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)$ for an approaching free particle outside the interaction sphere of the first particle is assumed to be statistically independent of the d.f., ${}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$, for the first particle's being initially at the phase point $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1$ at time t. This assumption is the condition of molecular chaos.

The probable number of collisions during dt is then given by the product of the number of particles initially at $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$ and the probable number of approaching particles, i.e.,

$$N\,[{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\,d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{p}_1]\,(N-1)\,[{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)\,d\omega\,U\,dt\,d\boldsymbol{p}_2], \qquad (2.3.2.14)$$

where $(N-1)$ appears, since only $(N-1)$ other particles than the first are available as approaching particles.

The integral of the expression (2.3.2.14) over all colliding particles $d\boldsymbol{p}_2$ and over the diametral plane is identified with $\Gamma^{(-)}\,d\boldsymbol{\eta}_1\,dt$. With the further approximation $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$ one then has by Eq. (2.3.2.14).

$$\Gamma^{(-)} = \int\int N(N-1)\,{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\,{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, t)\,d\omega\,U\,d\boldsymbol{p}_2. \qquad (2.3.2.15)$$

A similar method of analysis is used to evaluate $\Gamma^{(-)}\, d\boldsymbol{\eta}_1 dt$, i.e., the gain of particles to the element $d\boldsymbol{\eta}_1$ at $\boldsymbol{\eta}_1 - d\boldsymbol{\eta}_1'$ at $t - dt$. In order that particles should contribute to $\Gamma^{(-)}$, i.e., that their phase points arrive in the element $d\boldsymbol{\eta}_1$ at $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)$ at $t - dt$ and in the element $d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{p}_2$ at $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2)$ at $t - dt$, they must have definite momenta, prescribed by the collision dynamics, before collision. These momenta will be distinguished by primes, $\boldsymbol{p}_1'$ and $\boldsymbol{p}_2'$. One then has the contribution to $\Gamma^{(+)}$, i.e., $\Delta\Gamma^{(+)}$, given by

$$\Delta\Gamma^{(+)}\, d\boldsymbol{\eta}_1\, dt = \\ = N\,[{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1', t)\, d\boldsymbol{r}_1\, d\boldsymbol{p}_1']\,(N-1)\,[{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2', t)\, d\omega\, U'\, dt\, d\boldsymbol{p}_2'], \tag{2.3.2.16}$$

where $U' = U'(\boldsymbol{p}_2', m_2 - \boldsymbol{p}_1', m_1)$. From the collision dynamics, $\boldsymbol{p}_1'$, $\boldsymbol{p}_2'$ and $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ are related such that

$$|U'| = |U|, \qquad d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_2' = d\boldsymbol{p}_1\, d\boldsymbol{p}_2, \tag{2.3.2.17}$$

so that from Eq. (2.3.2.16), with Eq. (2.3.2.17) and $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1$ and integrating over all particles and the diametral plane,

$$\Gamma^{(-)} = \int\!\!\int N(N-1)\, {}^{I}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1', t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2', t)\, d\omega\, U\, d\boldsymbol{p}_2. \tag{2.3.2.18}$$

The use of the distribution function ${}^{I}f^{(1)}$, as defined by Eq. (2.3.2.6), is necessary throughout the analysis since the analysis considers only particles *prior* to interaction or which are outside each other's interaction sphere. The use of the more general d.f. of Eq. (2.3.2.1) would in general involve particles during interaction, or, as one may say, involves incomplete collisions. The use of ${}^{I}f^{(1)}$ is therefore a formal expression of the limitation of the above analysis to complete collisions.

Combining Eqs. (2.3.2.13), (2.3.2.15) and (2.3.2.18) yields Boltzmann's equation,

$$\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \\ = (N-1) \int\!\!\int U\,[{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1', t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2', t) - \\ - {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, t)]\, d\omega\, d\boldsymbol{p}_2. \tag{2.3.2.19}$$

Only formal manipulation is now required to introduce more convenient or conventional variables of integration.

All the assumptions discussed by Grad [10, p. 348] have been clearly introduced in the above analysis, i.e.,

1) point particles (definition of functions ${}^{T}f^{(1)}$ as point functions),
2) complete collisions,
3) slowly varying d.f.,
4) molecular chaos.

It must be emphasized that not only has assumption (2) been used in the analysis but it has now been expressed formally by means of

Eqs. (2.3.2.6) and (2.3.2.7). Eq. (2.3.2.19) refers strictly to those particles which are not at time t in instantaneous interaction with any other particles. Under such conditions, these particles will be referred to as "free" particles although they may be acted upon by an external field.

In connection with assumption (2), GRAD [10, p. 349] states that it is a stronger form of the binary collision assumption. The consideration involving two free particles just prior to collision naturally excludes a third particle either during interaction or prior to interaction of the two particles.

The first restriction, (1), must be removed sometimes and $\boldsymbol{r}$ must be defined as the position of the centre of mass of the particle; the latter's finite size must be allowed for by removing the assumption $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1$ (c.f. ENSKOG's kinetic theory of dense gases [15, p. 652]).

Since the equation (2.3.2.19) does not strictly allow a description of the behavior of momentarily interacting particles, the question arises as to whether the motion of such momentarily excluded particles can be discussed by another d.f. equation. This equation will be considered later (Chapter 3).

2.3.3. *Derivation of Boltzmann Equation from Liouville Equation*

The first derivation of the BOLTZMANN equation using the concept of a truncated distribution function was given in reference 11. In the present section the derivation of BOLTZMANN's equation from LIOUVILLE's equation is developed along a path which differs in many aspects in comparison to the above reference.

The most general way of deriving the equation for the single particle d.f., $f^{(1)}$, starts from the equation describing the behaviour of the complete system of N interacting particles, i.e., LIOUVILLE's equation, Eq. (1.2.14), which describes the variation of $f^{(N)}$. The relation of ${}^{T}f^{(1)}$ to $f^{(N)}$ obtained from Eqs. (2.3.2.1) and (2.3.2.6) should then lead to Eq. (2.3.2.19).

In this section, this philosophy will be followed.

Consider the function $f^{(N)}$ which has been discussed in Sect. 1.2 and defined therein, Eq. (1.2.13). The system of N particles which the function $f^{(N)}$ describes includes particles that are in mutual interaction. However, it is possible to separate $f^{(N)}$ into two parts, ${}^{T}f^{(N)}$ and ${}^{c}f^{(N)}$, such that

$$f^{(N)} = {}^{T}f^{(N)} \cup {}^{c}f^{(N)}. \tag{2.3.3.1}$$

These parts are defined as follows,

$$\begin{aligned} {}^{T}f^{(N)} &\equiv f^{(N)} \qquad \text{for} \qquad |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| \geqslant \xi_0, \\ &\text{for all } i,j \in \{N\}, \text{ i.e., } i,j = 1,2,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.3.3.2}$$

and

$${}^{c}f^{(N)} \equiv f^{(N)} \qquad \text{for} \qquad |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| < \xi_0, \qquad \text{for any } i,j \in \{N\}. \tag{2.3.3.3}$$

The physical interpretation of ${}^{T}f^{(N)}$ is that ${}^{T}f^{(N)} \prod_{k \in \{N\}} d\boldsymbol{\eta}_k$ is the

probability of finding phase points η_k, $(k = 1, 2, \ldots, N)$, associated with the N particles taken in any order, in the volume elements $d\eta_k$, $(k = 1, 2, \ldots, N)$, and for which no particle is any closer to another particle than the distance ξ_0, i.e., $r_i - r_j \geqslant \xi_0$ for all particles in the system, $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$. The d.f., ${}^{T}f^{(N)}$, is interpreted as the probability distribution function for the phase points η_k in the case where *at least* two particles must be interacting with each other, i.e., $|r_i - r_j| < \xi_0$ for at least two $i, j \in \{N\}$.

Now the probability of finding the phase point η_1 in $d\eta_1$ at η_1 when no interactions are allowed is ${}^{T}f^{(1)}\, d\eta_1$, and ${}^{T}f^{(1)}$ may be calculated from ${}^{T}f^{(N)}$ by integrating ${}^{T}f^{(N)}$ not over all phase space accessible to the $(N - 1)$ particles [c.f. Eq. (2.3.2.1)] but over only that domain of phase space, D, accessible to the $(N - 1)$ particles where no interaction takes place. Thus,

$$ {}^{T}f^{(1)} = \int_{D} {}^{T}f^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\eta_k, \tag{2.3.3.4} $$

which with the definitions (2.3.3.1) to (2.3.3.3) gives physical meaning to the formal discussion of Sect. 2.3.1. Since the integral in Eq. (2.3.3.4) is evaluated only over the domain in configuration space (r) which is restricted to $r_i - r_k \geqslant \xi_0$, then ${}^{T}f^{(N)}$ in Eq. (2.3.3.4) may be replaced, from Eq. (2.3.3.2), by $f^{(N)}$. Then

$$ {}^{T}f^{(1)} = \int_{D} f^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\eta_k, \tag{2.3.3.5} $$

where D represents all phase space accessible to the particles, k, except where $|r_1 - r_k| < \xi_0$ i.e., r_k is restricted to the natural boundaries of the system and the boundary given by $|r_1 - r_k| = \xi_0$. The use of the subscript "1" on r_1 does not relax the limit on r_k, which according to Eq. (2.3.3.2) is given by $r_i - r_k \geqslant \xi_0$, since *any* single particle in the set $\{N\}$ may be chosen for the computation of (2.3.3.5).

On the basis of Eqs. (2.3.3.5) and (1.2.14) it is now possible to derive, purely formally, the equation describing the variation of ${}^{T}f^{(1)}$.

LIOUVILLE's equation, Eq. (1.2.14), with $\eta_{ij} = r_j, p_j$, becomes,

$$ \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{j \in \{N\}} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_j} \cdot \frac{d r_j}{dt} + \sum_{j \in \{N\}} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_j} \cdot \frac{d p_j}{dt} = 0. \tag{2.3.3.6} $$

Since

$$ \frac{d r_j}{dt} = \frac{p_j}{m_j} \quad \text{and} \quad \frac{d p_j}{dt} = X_j, \tag{2.3.3.7} $$

where X_j is the force on the j'th particle due to external forces and interparticle forces. Then with Eq. (2.3.3.7), Eq. (2.3.3.6) becomes,

$$ \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{j \in \{N\}} \frac{p_j}{m_j} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_j} + \sum_{j \in \{N\}} X_j \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_j} = 0. \tag{2.3.3.8} $$

In order to find the equation describing the variation of ${}^{T}f^{(1)}$, it is necessary to calculate $d{}^{T}f^{(1)}/dt$. Thus, from Eq. (2.3.3.5)

$$\frac{d\,{}^{T}f^{(1)}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{2.3.3.9}$$

where

$$\frac{d\,{}^{T}f^{(1)}}{dt}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) = \frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial t}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) + \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) +$$

$$+ \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t), \tag{2.3.3.10}$$

so that the operator d/dt may be written,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}, \tag{2.3.3.11}$$

where $\boldsymbol{p}_1 = m_1\,(d\boldsymbol{r}_1/dt)$, and $\boldsymbol{X}_1^{(e)} = d\boldsymbol{p}_1/dt$ is the external force on the particle free from interparticle forces. Therefore one has from Eqs. (2.3.3.9) to (2.3.3.11),

$$\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int_{D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k +$$

$$+ \boldsymbol{X}_1^{(e)}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\int_{D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{2.3.3.12}$$

which expresses the total variation in time of ${}^{T}f^{(1)}$.

It is necessary now to evaluate the integrals on the R.H.S. of Eq. (2.3.3.12). These integrals are evaluated in Appendix B, and only the results will be used below.

From Eqs. (B.1.1), (B.2.22) and (B.3.1), Eq. (2.3.3.12) becomes

$$\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} =$$

$$= \int_{D}\left\{\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)}\cdot\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right\} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k -$$

$$\sum_{g\in\{N-1\}}\int d\boldsymbol{p}_g \int_{S_{i,g}} {}^{T}f^{(2)}\,\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{2.3.3.13}$$

Now from Eq. (2.3.3.8) one has

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1\cdot\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} = -\sum_{J\in\{N-1\}}\left|\frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J}\cdot\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_J} + \boldsymbol{X}_J\cdot\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_J}\right|. \tag{2.3.3.14}$$

Since the interparticle forces in the domain D are zero, by definition of the domain D, Eq. (2.3.3.14) may be substituted in the integral on D in Eq. (2.3.3.13) with $\boldsymbol{X}_1$ and $\boldsymbol{X}_J$ replaced by $\boldsymbol{X}_1^{(e)}$ and $\boldsymbol{X}_J^{(e)}$ respectively. Then Eq. (2.3.3.13) becomes

$$\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} = - \sum_{J \in \{N-1\}} \int_D \left[\frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_J} - \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{X}_J^{(e)} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_J} \right] \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \sum_{g \in \{N-1\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{S_{1,g}} {}^{T}f^{(2)} \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (2.3.3.15)$$

The first term in the integral is given by Eq. (B.4.3) and the second term in the integral from Eq. (B.5.4) is zero, so that with $g \equiv J$ one has from Eq. (2.3.3.15),

$$\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} =$$

$$= \sum_{J \in \{N-1\}} \int d\boldsymbol{p}_J \int_{S_{1,J}} {}^{T}f^{(2)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \right) \cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (2.3.3.16)$$

The surface integral in Eq. (2.3.3.16) may be separated into two integrals, one over the surface $S_{1,J}^{+}$ referring to particles for which $(\boldsymbol{p}_J/m_J - \boldsymbol{p}_1/m_1) \cdot d\boldsymbol{S} > 0$, i.e., receding particles, and the other integral as one over the surface $S_{1,J}^{-}$ for which $(\boldsymbol{p}_J\, m_J - \boldsymbol{p}_1\, m_1) \cdot d\boldsymbol{S} < 0$, i.e., for approaching particles. Now the relative velocity, $\boldsymbol{U}$, of the particles is given by

$$\frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} = \boldsymbol{U}, \qquad (2.3.3.17)$$

so that Eq. (2.3.3.16) becomes

$$\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} =$$

$$= \sum_{J \in \{N-1\}} \int d\boldsymbol{p}_J \left\{ \int_{S_{1,J}^{+}} {}^{T}f^{(2)} \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_{1,J}^{-}} {}^{T}f^{(2)}\, \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} \right\}. \qquad (2.3.3.18)$$

Considering (as in Sect. 2.3.2) a diametral plane, perpendicular to $\boldsymbol{U}$, of the sphere $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_J| = \xi_0$, one may write

$$\boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} = U\, d\omega \qquad \text{for} \qquad S_{1,J}^{+}, \qquad (2.3.3.19)$$

and

$$\boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} = -\, U\, d\omega \qquad \text{for} \qquad S_{1,J}^{-}, \qquad (2.3.3.20)$$

where $d\omega = \xi\, d\varepsilon\, d\xi$ is the projection of $d\boldsymbol{S}$ on the diametral plane, which is described by the plane polar coordinates ξ and ε. Then with Eqs. (2.3.3.19) and (2.3.3.20), the R.H.S. of Eq. (2.3.3.18) becomes

$$\sum_{J\in(N-1)} \int d\boldsymbol{p}_J \int [{}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{+}, \boldsymbol{p}_1^{+}, \boldsymbol{p}_J^{+}, t) - {}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{-}, \boldsymbol{p}_1^{-}, \boldsymbol{p}_J^{-}, t)]\, U\, d\omega, \tag{2.3.3.21}$$

where the superscript "+" denotes those phase points $\boldsymbol{r}_J^{+}, \boldsymbol{p}_1^{+}, \boldsymbol{p}_J^{+}$ corresponding to the particle J leaving the sphere of influence of particle 1, i.e., just after collision. Similarly, $\boldsymbol{r}_J^{-}, \boldsymbol{p}_1^{-}, \boldsymbol{p}_J^{-}$ denote the phase points just prior to collision.

The principle of molecular chaos is invoked at this point of the analysis. The principle states that for two particles not in previous interaction their phase points are statistically independent, and one may assume that their joint probability d.f., ${}^{T}f^{(2)}$, may be factorized thus

$${}^{T}f^{(2)} = {}^{T}f^{(1)}\, {}^{T}f^{(1)}. \tag{2.3.3.22}$$

However, Eq. (2.3.3.22) may not be applied to ${}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{+}, \boldsymbol{p}_1^{+}, \boldsymbol{p}_J^{+}, t)$ since this is the joint probability d.f. for two particles that have just collided. Nevertheless, the joint probability d.f. is constant in time provided that no third particle interferes in the motion, which is true if binary collisions only are assumed [11]. Then one has

$${}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{+}, \boldsymbol{p}_1^{+}, \boldsymbol{p}_J^{+}, t) = {}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t-\tau), \tag{2.3.3.23}$$

where the values $\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'$ are those values of the phase points just before collision, at time $(t-\tau)$, which give rise to the values $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{+}, \boldsymbol{p}_1^{-}, \boldsymbol{p}_J^{-}$ just after collision. One may now factorize the R.H.S. Eq. (2.3.3.23),

$${}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t-\tau) = {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{p}_1', t-\tau)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_J', t-\tau). \tag{2.3.3.24}$$

If now ${}^{T}f^{(1)}$ is assumed to be constant over the time interval τ, and regions of space larger than $|\boldsymbol{r}_J' - \boldsymbol{r}_J^{+}|$ and $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1'|$ one may write t in place of $t-\tau$ and $\boldsymbol{r}_1$ for $\boldsymbol{r}_1'$, $\boldsymbol{r}_J^{+}$ and from Eqs. (2.3.3.23) and (2.3.2.24),

$${}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{+}, \boldsymbol{p}_1^{+}, \boldsymbol{p}_J^{+}, t) = {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1', t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J', t). \tag{2.3.3.25}$$

For ${}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{-}, \boldsymbol{p}_1^{-}, \boldsymbol{p}_J^{-}, t)$ one may use Eq. (2.3.3.22) directly since the collision has not yet taken place. With $\boldsymbol{r}_1 \cong \boldsymbol{r}_J^{-}$ and dropping the superscripts on $\boldsymbol{p}_1^{-}$ and $\boldsymbol{p}_J^{-}$,

$${}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J^{-}, \boldsymbol{p}_1^{-}, \boldsymbol{p}_J^{-}, t) = {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J, t). \tag{2.3.3.26}$$

Substituting Eqs. (2.3.3.25), (2.3.3.26) in Eq. (2.3.3.21) and summing over all particles J, any of which one may now be denoted by "2" to identify it with the second particle discussed in Sect. (2.3.2), the equation for ${}^{T}f^{(1)}$ finally becomes

$$\frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} =$$

$$= (N-1) \int d\boldsymbol{p}_2 \int [{}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1', t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2', t) -$$

$$- {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\, {}^{T}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2, t)]\, U\, d\omega. \tag{2.3.3.27}$$

This equation, derived from LIOUVILLE's equation, is identical to Eq. (2.3.2.19) of Sect. (2.3.2).

The assumptions necessary for the formulation of (2.3.2.27) are, furthermore, similar to those listed below Eq. (2.3.2.19).

2.4. Truncated Wigner Function Equation

In this section the equation of motion for the reduced truncated WIGNER distribution function will be derived in formal analogy to the analysis of Sect. 2.3.3. Although the WIGNER distribution function is the quantum counterpart of the classical distribution function it cannot be physically interpreted strictly as a probability distribution in the classical sense. The lack of a direct probability interpretation for $f_W^{(N)}$ is associated with the impossibility of simultaneously prescribing a definite position and momentum for any particular particle in quantum mechanics, and indeed it is formally evident in that although $f_W^{(N)}$ is everywhere real, it is not necessarily positive [25; 15, p. 670]. Correspondingly, care must be taken in making a direct comparison of the equation for the single-particle WIGNER d.f., which will be derived below, and the classical BOLTZMANN equation, Eq. (2.3.3.27).

As in the classical case, it will be found that the derivation by means of truncated distribution functions will allow a more careful and explicit evaluation of those conditions leading to the single particle distribution function equation of quantum kinetic theory than has been given before in the literature.

As before, an N-particle system represented by an ensemble of I systems in γ-space will be considered. The motion of this ensemble is governed by WIGNER's equation, Eq. (1.4.6),

$$\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \sum_{j \in \{N\}} \frac{\boldsymbol{p}_j}{m_j} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_j} + \theta \cdot f_W^{(N)} = 0, \tag{2.4.1}$$

which is the analogue of Eq. (2.3.3.8). The distribution function $f_W^{(N)}$ Eq. (1.4.2), is a function of $\boldsymbol{\eta}$ and t as for the classical distribution function $f^{(N)}$, Eq. (1.2.13), and $\theta \cdot f_W^N$ is defined by Eq. (1.4.7).

It is possible now to proceed in formal analogy to the analysis of Sect. 2.3.3. Reduced and truncated d.f. 's., f_W^1, ${}^I f_W^N$ and ${}^I f_W^1$, Eqs. (2.3.1.1) to (2.3.1.4), are similarly defined as in the classical case, Eqs. (2.3.2.1) and (2.3.3.1) to (2.3.3.5), by simply adding the subscript "W" to the classical d.f. 's.

The function ${}^I f_W^{(1)}$ refers to those particles which are not interacting with any other particles, so that the wave function for the N-particle assembly, $\psi_k^{(N)}$, in Eq. (1.3.1), may be separated into a product of N wave functions $\psi_{kj}^{(1)}$, $(j = 1, \ldots, N)$, for the separate particles in the system [3, p. 9]. It is necessary, however, to retain the statistical weight a_k for each member of the ensemble in Eq. (1.3.1). With separation of

variables the SCHROEDINGER equation for the N-particle system described by $\psi_k^{(N)}$ then splits into N separate SCHROEDINGER equations, [3, p. 9] each one involving a separate particle, for each $\psi_{kj}^{(1)}$. Thus one may, in the absence of interactions, construct a density matrix, $\varrho^{(1)}$, from $\psi_{kj}^{(1)}$,

$$\varrho^1(\eta_\alpha'; \eta_\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\Gamma} w_k \overset{(1)}{\psi}{}^*_{kj}(\eta_\alpha', t)\, \psi_{kj}^{(1)}(\eta_\alpha, t), \tag{2.4.2}$$

and following the procedure of Sect. 1.3, the time variation of $\varrho^{(1)}$ is calculated by means of the SCHROEDINGER equation for $\psi_{kj}^{(1)}$. The FOURIER transform of the density matrix equation, see Eqs. (1.4.2), (1.4.5) and (1.4.6), then gives the equation for ${}^T f_W^{(1)}$,

$$\frac{d\,{}^T f_W^{(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^T f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\,{}^T f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot {}^T f_W^{(1)} = 0, \tag{2.4.3}$$

where $\theta_1^{(e)}$ is the operator representing the external force field acting on particle "1", see Eqs. (1.5.2), (1.5.3), the external field only appearing since the internal or interparticle forces are zero in the domain of definition of ${}^T f_W^{(1)}$. When interactions do occur in the system, it is clear that the R.H.S. of Eq. (2.4.3) is not equal to zero [see Eq. (2.3.2.13)]. Now since [c.f. Eq. (2.3.3.10)],

$$\frac{d\,{}^T f_W^{(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^T f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\,{}^T f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \left[\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right]_c {}^T f_W^{(1)}, \tag{2.4.4}$$

where the bracketed term $[\ldots]_c$ must now be interpreted as the expectation value of the corresponding quantum operator. For more details concerning this operator the reader is referred to the appropriate literature [22, p. 27]. Retention of the quantum formalism however requires that [see Eqs. (2.4.3), (2.4.4)],

$$\left[\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right]_c {}^T f_W^{(1)} = \theta_1^{(e)} \cdot {}^T f_W^{(1)}. \tag{2.4.5}$$

Proceeding now as in Eq. (2.3.3.12),

$$\frac{d\,{}^T f_W^{(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^T f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\,{}^T f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot {}^T f_W^{(1)} =$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_D f_W^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \int_D f_W^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k +$$

$$+ \theta_1^{(e)} \cdot \int_D f_W^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{2.4.6}$$

where

$${}^T f_W^{(1)} = \int_D f_W^{(N)} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{2.4.7}$$

In purely formal analogy to the analysis leading to Eq. (2.3.3.13) from (2.3.3.12) one finds,

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{T}f_W^{(1)} = \int_D \left\{\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} - \right.$$

$$\left. + \theta_1^{(e)}\cdot f_W^{(N)}\right\} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \sum_{g\in\{N-1\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{S_{1,g}} {}^{T}f_W^{(2)}\,\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (2.4.8)$$

Now it is necessary to substitute for the first term on the R.H.S. of Eq. (2.4.8) from WIGNER's equation, rather than from LIOUVILLE's equation as in Eqs. (2.3.3.13) to (2.3.3.15). Thus with $\theta\cdot f_W^N$ expressed by Eq. (1.5.3), one has from Eq. (2.4.1), i.e., WIGNER's equation,

$$\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot f_W^{(N)} =$$

$$= -\sum_{j\in\{N-1\}}\left[\frac{\boldsymbol{p}_j}{m_j}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_j} + \theta_j^{(e)}\cdot f_W^{N}\right] - \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=2\\ i<j}}^{N}\theta_{ij}\cdot f_W^{N}. \qquad (2.4.9)$$

Substituting Eq. (2.4.9) into Eq. (2.4.8), and since θ_{ij} (the interparticle forces) is zero in the domain of integration D, Eq. (2.4.8) becomes,

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{T}f_W^{(1)} =$$

$$= -\sum_{j\in\{N-1\}}\int_D\left[\frac{\boldsymbol{p}_j}{m_j}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_j} + \theta_j^{(e)}\cdot f_W^{N}\right]\prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k -$$

$$- \sum_{g\in\{N-1\}}\int d\boldsymbol{p}_g\int_{S_{1,g}} {}^{T}f_W^{(2)}\,\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (2.4.10)$$

The first term in the integral is given by Eq. (B.4.3) and the second term is zero by integration over momenta (see below Eq. (1.5.4)). Then Eq. (2.4.10) becomes,

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{T}f_W^{(1)} = -\sum_{J\in\{N-1\}}\int d\boldsymbol{p}_J\int_{S_{1,J}} {}^{T}f_W^{(2)}\left(\frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right)\cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (2.4.11)$$

which is the quantum analogy of Eq. (2.3.3.16).

Consider the integral on the R.H.S. of Eq. (2.4.11). Writing

$$\frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} = \boldsymbol{U}, \qquad (2.4.12)$$

where $\boldsymbol{U}$ is then the relative velocity vector of the two particles, the integral term is

$$\int d\boldsymbol{p}_J \int_{S_{1,J}} {}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\, \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{2.4.13}$$

The expression

$${}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\, \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S}\, d\boldsymbol{p}_J, \tag{2.4.14}$$

may be interpreted as the distribution probability for the J'th particle on the surface element $d\boldsymbol{S}$ of the interaction sphere of particle 1 when the J'th particle has a momentum in the range $\boldsymbol{p}_J$ to $\boldsymbol{p}_J + d\boldsymbol{p}_J$ and a velocity $\boldsymbol{U}$ relative to the 1st particle. The integral (2.4.13) of the term (2.4.14) takes into account all possible orientations of the relative velocity vector (by integrating over the surface of the interaction sphere) and all values of the momentum $\boldsymbol{p}_J$ of the J'th particle. The integral (2.4.13) is in fact the surface integral of the probability current density [16; 22, p. 23] over the sphere.

The expression (2.4.14) includes both those cases in which $\boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S}$ is positive and negative, i.e., the J'th particle is leaving or entering the sphere of interaction of the first particle, respectively. These two cases refer respectively to conditions just after and just before the collision of the two particles, and the dynamics of the collisions are implicit in the expressions (2.4.13) and (2.4.14). In order to introduce the collision dynamics explicitly, it is necessary to refer to the phase points, $\boldsymbol{\eta}'$, and $\boldsymbol{\eta}''$.

$\boldsymbol{\eta}'$ denotes the phase points for the two particles, $(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J')$, associated with the d.f., ${}^{T}f_W^{(2)}$, at a time t' when the J'th particle enters the sphere of interaction (centre at $\boldsymbol{r}_1'$) of the first particle, i.e., just prior to collision. At a later time t, $t > t'$, the particle J leaves the interaction sphere and the d.f., ${}^{T}f_W^{(2)}$, is associated with the phase points $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J)$ as in (2.4.14) and consequently one has $\boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} > 0$.

$\boldsymbol{\eta}''$ denotes the phase points for the two particles, $(\boldsymbol{r}_1'', \boldsymbol{r}_J'', \boldsymbol{p}_1'', \boldsymbol{p}_J'')$, associated with the d.f., ${}^{T}f_W^{(2)}$, at a time t'' when the J'th particle leaves the sphere of interaction (centre at $\boldsymbol{r}_1''$) of the first particle, i.e., just after a collision. At a time t, $t < t''$, this collision is initiated by the J'th particle entering the interaction sphere at which time t the d.f., ${}^{T}f_W^{(2)}$, is associated with the phase points $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J)$, again as in (2.4.14), so that $\boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} < 0$.

Denoting the phase points $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J)$ by $\boldsymbol{\eta}$, the two collisions discussed above may be expressed symbolically as $\boldsymbol{\eta}' \to \boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}''$.

The analysis is restricted to the case of binary collisions. Then the relative momentum vector, $(\boldsymbol{p}_J - \boldsymbol{p}_1)$, of the two particles after the collision $\boldsymbol{\eta}' \to \boldsymbol{\eta}$ is equal in magnitude but opposite in direction to the relative momentum vector, $(\boldsymbol{p}_J - \boldsymbol{p}_1)$, of the two particles before the collision $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}''$. In view of the conservation of the total momentum of the system, the state $(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J')$ may be identified with the state

$(\boldsymbol{p}_1'', \boldsymbol{p}_J'')$ provided that the relative momentum vectors $(\boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_J')$ and $(\boldsymbol{p}_1'' - \boldsymbol{p}_J'')$ are understood to be opposite in direction. The collision $\boldsymbol{\eta}' \to \boldsymbol{\eta}$ is described as the inverse of the collision $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}''$, and for a more detailed description of such collisions reference is made to the appropriate literature [7, p. 53].

For a given momentum state $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J)$ of the two particles one may then express the surface integral in (2.4.13) in terms of two functions $R(\boldsymbol{\eta}'|\boldsymbol{\eta}; t')$ and $R(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}''; t)$ thus,

$$\int_{S_{1,J}} {}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, t)\, \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} = R^{+}(\boldsymbol{\eta}'|\boldsymbol{\eta}; t') - R^{-}(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}''; t), \qquad (2.4.15)$$

where the superscripts $+$ and $-$ refer to the integrals for the cases of receding and approaching particles, respectively. The opposite sign of the two functions is a consequence of the relative velocity being opposite in the two cases. The functions R^{+} and R^{-} will now be expressed as the integral transforms of the two particle d.f., ${}^{T}f_{W}^{2}$, by means of the kernel $P(\bar{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p})$. This kernel may be interpreted as a probability coefficient in that $P(\bar{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p})\, d\bar{\boldsymbol{p}}$ gives the probability that two particles with momenta $\bar{\boldsymbol{p}}$ to $\bar{\boldsymbol{p}} + d\bar{\boldsymbol{p}}$ before collision, $(\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J)$, possess momenta $\boldsymbol{p}$ after collision, i.e., P should be a function of all four momenta. Furthermore, $P(\bar{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}$ gives the probability that particles with momenta $\boldsymbol{p}$ to $\boldsymbol{p} + d\boldsymbol{p}$ after collision possessed momenta $\bar{\boldsymbol{p}}$ before collision. Thus from Eq. (2.4.15),

$$\int_{S_{1,J}} {}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, t)\, \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} = R^{+}(\boldsymbol{\eta}'|\boldsymbol{\eta}; t') - R^{-}(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}''; t) =$$

$$= \int {}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{\eta}', t')\, P(\boldsymbol{p}'|\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}' - \int {}^{T}f_{W}^{2}(\boldsymbol{\eta}, t)\, P(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}'')\, d\boldsymbol{p}'', \qquad (2.4.16)$$

where the integrals are understood to be taken over all values of the momenta accessible to the particles, and $\int \ldots d\boldsymbol{p}' \equiv \iint \ldots d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_J'$.

Since now the collisions discussed above are inverse collisions, i.e., $\boldsymbol{\eta}' \to \boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}''$ or $\boldsymbol{\eta}'' \to \boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}'$ the momentum state $(\boldsymbol{p}')$, (where $\boldsymbol{p}' \equiv \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'$), may be identified with $(\boldsymbol{p}'')$. With this identity, the Eq. (2.4.16) may be substituted into (2.4.13) which then becomes

$$\int d\boldsymbol{p}_J \int_{S_{1,J}} {}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\, \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \int \int \int [{}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t')\, P(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) -$$

$$- {}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\, P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J|\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J')]\, d\boldsymbol{p}_J\, d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_J'. \qquad (2.4.17)$$

The probability coefficients $P(\boldsymbol{p}'|\boldsymbol{p})$ and $P(\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}')$ are determined by the collision dynamics, so that the latter may now be introduced explicitly into Eq. (2.4.11) by substituting the expression (2.4.17) into Eq. (2.4.11) by means of (2.4.13).

Then one has

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(1)} =$$

$$= \sum_{J \in \{N-1\}} \int\int\int [{}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{\eta}', t')\, P(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J'|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) -$$

$$- {}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{\eta}, t)\, P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J|\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J')]\, d\boldsymbol{p}_J\, d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_J'. \tag{2.4.18}$$

Since the probability coefficients are determined by the collision dynamics, we require without details of justification that they must satisfy various conditions imposed on the dynamics such as conservation of momentum and energy. These conditions are as follows,

(i) $$P(\bar{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p}) \geqslant 0. \tag{2.4.19}$$

(ii) Since the particles are indistinguishable,

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}_1, \bar{\boldsymbol{p}}_J|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) = P(\bar{\boldsymbol{p}}_J, \bar{\boldsymbol{p}}_1|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) = P(\bar{\boldsymbol{p}}_1, \bar{\boldsymbol{p}}_J|\boldsymbol{p}_J, \boldsymbol{p}_1) = P(\bar{\boldsymbol{p}}_J, \bar{\boldsymbol{p}}_1|\boldsymbol{p}_J, \boldsymbol{p}_1). \tag{2.4.20}$$

(iii) The momenta must be invariant with respect to an inversion of space and time coordinates, but the momenta must change status before and after collision. The probability coefficients do not change during this inversion, i.e.,

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p}) = P(\boldsymbol{p}|\bar{\boldsymbol{p}}). \tag{2.4.21}$$

(iv) The probability coefficient, P, is invariant under transformation from one frame of reference to another in uniform translation with respect to the first. Thus P depends only upon the relative momenta of the particles, i.e.,

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}_1, \bar{\boldsymbol{p}}_J|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) = P(\bar{\boldsymbol{p}}_1 - \bar{\boldsymbol{p}}_J, \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_J, \bar{\boldsymbol{p}}_1 + \bar{\boldsymbol{p}}_J - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_J). \tag{2.4.22}$$

(v) Conservation of Momentum. The probability coefficient P must involve the DIRAC δ-function of three dimensional space, $\delta_3(\boldsymbol{p})$, where [8, p. 58],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_3(\boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p} = 1, \tag{2.4.23}$$

as follows,

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}_1, \bar{\boldsymbol{p}}_J|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) = P(\bar{\boldsymbol{p}}_1 - \bar{\boldsymbol{p}}_J, \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_J)\, \delta_3\left(\frac{(\bar{\boldsymbol{p}}_1 + \bar{\boldsymbol{p}}_J) - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_J)}{2}\right) \tag{2.4.24}$$

where still only one function, P, of the two relative momentum vectors remains to be determined.

The following transformation of variables will be introduced, $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J) \rightarrow (\boldsymbol{p}_c, \boldsymbol{p}_v)$, where

$$\boldsymbol{p}_c = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_J), \qquad \bar{\boldsymbol{p}}_c = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{p}}_1 + \bar{\boldsymbol{p}}_J), \tag{2.4.25}$$

$$\boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_J, \qquad \bar{\boldsymbol{p}}_v = \bar{\boldsymbol{p}}_1 - \bar{\boldsymbol{p}}_J. \tag{2.4.26}$$

By conservation of momentum,

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_J = \bar{\boldsymbol{p}}_1 + \bar{\boldsymbol{p}}_J, \qquad \text{i.e.,} \qquad \boldsymbol{p}_c = \bar{\boldsymbol{p}}_c, \tag{2.4.27}$$

and one has,

$$\bar{\boldsymbol{p}}_1 = \bar{\boldsymbol{p}}_c + \frac{\bar{\boldsymbol{p}}_v}{2} = \boldsymbol{p}_c + \frac{\bar{\boldsymbol{p}}_v}{2}, \tag{2.4.28}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_J = \bar{\boldsymbol{p}}_c - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}_v}{2} = \boldsymbol{p}_c - \frac{\bar{\boldsymbol{p}}_v}{2}. \tag{2.4.29}$$

(vi) Invariance in Rotation. The function $P(\bar{\boldsymbol{p}}_1 - \bar{\boldsymbol{p}}_J, \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_J)$ in Eq. (2.4.24) may be written $P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v)$ where $\bar{\boldsymbol{p}}_v$, $\boldsymbol{p}_v$ are given by (2.4.26). If $P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v)$ is invariant under a rotation of the coordinate system, it can be a function only of the geometrically invariant scalar product of the two vectors $\bar{\boldsymbol{p}}_v$ and $\boldsymbol{p}_v$. In this case the magnitude of the vectors and the angle between them are sufficient to specify the scalar product and therefore P itself. Then the function $P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v)$ depends only upon the magnitude of the vectors $\bar{\boldsymbol{p}}_v$ and $\boldsymbol{p}_v$ and the angle β between them, i.e.,

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v) = P(\bar{p}_v, p_v, \beta), \tag{2.4.30}$$

where $\bar{p}_v = |\bar{\boldsymbol{p}}_v|$, $p_v = |\boldsymbol{p}_v|$.

From Eq. (2.4.18) one has by means of Eq. (2.4.21),

$$\frac{\partial {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(1)} =$$

$$= \sum_{J \in \{N-1\}}' \int\int\int P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, \bar{\boldsymbol{p}}_1', \bar{\boldsymbol{p}}_J') [{}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \bar{\boldsymbol{p}}_1', \bar{\boldsymbol{p}}_J', t) -$$

$$- {}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)]\, d\boldsymbol{p}_J\, d\bar{\boldsymbol{p}}_1'\, d\bar{\boldsymbol{p}}_J'. \tag{2.4.31}$$

Introducing Eq. (2.4.24) into the integrand in the R.H.S. of Eq. (2.4.31), accompanied by a change of variables given by Eqs. (2.4.25) to (2.4.29), one has for the R.H.S. of Eq. (2.4.31)

$$\sum_{J \in \{N-1\}}' \int\int\int P(\boldsymbol{p}_v, \bar{\boldsymbol{p}}_v') \, \delta_3(\boldsymbol{p}_c - \bar{\boldsymbol{p}}_c') \, [{}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \bar{\boldsymbol{p}}_1', \bar{\boldsymbol{p}}_J', t') -$$

$$- {}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)] \left| \frac{\partial(\bar{\boldsymbol{p}}_1', \bar{\boldsymbol{p}}_J')}{\partial(\bar{\boldsymbol{p}}_v', \bar{\boldsymbol{p}}_c')} \right| d\bar{\boldsymbol{p}}_v'\, d\bar{\boldsymbol{p}}_c'\, d\boldsymbol{p}_J, \tag{2.4.32}$$

where the momenta in the arguments of ${}^{T}f_{W}^{(2)}$ are given by [Eqs. (2.4.28) and (2.4.29)],

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_c + \frac{\boldsymbol{p}_v}{2}, \qquad \boldsymbol{p}_1' = \boldsymbol{p}_c + \frac{\boldsymbol{p}_v'}{2}, \tag{2.4.33}$$

$$\boldsymbol{p}_J = \boldsymbol{p}_c - \frac{\boldsymbol{p}_v}{2}, \qquad \boldsymbol{p}_J' = \boldsymbol{p}_c - \frac{\boldsymbol{p}_v'}{2}, \tag{2.4.34}$$

but are written as in Eq. (2.4.32) for convenience. The JACOBIAN, $\partial(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J')/\partial(\boldsymbol{p}_v', \boldsymbol{p}_c')$, of the transformation may be shown from Eqs. (2.4.28) and (2.4.29) to be equal to unity. Performing the integration over $\boldsymbol{p}_c'$ in (2.4.32) one then has, by Eq. (2.4.23), the following result for (2.4.32),

$$\sum_{J \in \{N-1\}} \int\int P(\boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{p}_v') \left[{}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t') - {}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t) \right] d\boldsymbol{p}_v' \, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.4.35}$$

For the final property of the probability coefficient, P, the conservation of energy must be invoked.

(vii) Conservation of Energy. The function $P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v)$ of Eq. (2.4.30) must contain the factor $\delta_1(\frac{1}{2}\cdot[\bar{p}_v^{\,2} - p_v^{\,2}])$, where δ_1 is the one-dimensional DIRAC δ-function, and [8, p. 58],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(x - a)\, F(x)\, dx = F(a). \tag{2.4.36}$$

Then $P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v)$ may be written as follows,

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}_v, \boldsymbol{p}_v) = P(\bar{p}_v, p_v, \beta) = \sigma(\bar{p}_v, \beta)\, \delta_1\left(\frac{1}{2}\,[\bar{p}_v^{\,2} - p_v^{\,2}]\right), \tag{2.4.37}$$

where $\sigma(\bar{p}_v, \beta)$ is yet to be determined.

Introducing Eq. (2.4.37) into the expression (2.4.35), the latter becomes,

$$\sum_{J \in \{N-1\}} \int\int \sigma(p_v, \beta)\, \delta_1\left(\frac{1}{2}\,[p_v^{\,2} - p_v'^{\,2}]\right) \left[{}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t') - {}^{T}f_{W}^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t) \right] d\boldsymbol{p}_v' \, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.4.38}$$

The element of solid angle $d\boldsymbol{\Omega}'$ in relative momentum space $(\boldsymbol{p}_v')$ may now be introduced. It is given by

$$d\boldsymbol{\Omega}' = \frac{d\boldsymbol{A}_{p_v'}}{p_v'^{\,2}}, \tag{2.4.39}$$

where $d\boldsymbol{A}_{p_v'}$ is an element of area on the surface of a sphere of radius p_v' in the relative momentum space $(\boldsymbol{p}_v')$. The element of volume $d\boldsymbol{p}_v'$ is then given by

$$d\boldsymbol{p}_v' = d\boldsymbol{A}_{p_v'}\, dp_v' = p_v'^{\,2}\, dp_v'\, d\boldsymbol{\Omega}'. \tag{2.4.40}$$

Introducing (2.4.40) into (2.4.38) and integrating over p_r' one has, since,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1\left(\frac{1}{2}\left[p_r^2 - p_r'^2\right)\right) p_r'^2\, dp_r' - 2\int_0^{\infty} \delta_1(p_r^2 - p_r'^2)\, p_r'\, d(p_r'^2) = p_r, \tag{2.4.41}$$

the following result for (2.4.38),

$$\sum_{J\in\{N-1\}} \int\int \left[{}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t') - \right.$$
$$\left. - {}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\right] \sigma(p_r, \beta)\, p_r\, d\boldsymbol{\Omega}'\, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.4.42}$$

The function σ, which is still unknown, must be determined from the collision theory for the two particles.

The expression (2.4.42) may now be substituted in place of the R.H.S. of Eq. (2.4.18),

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{T}f_W^{(1)} =$$
$$- \sum_{J\in\{N-1\}} \int\int \left[{}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_J', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_J', t') - {}^{T}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_J, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_J, t)\right]\cdot$$
$$\cdot\, \sigma(p_r, \beta)\, p_r\, d\boldsymbol{\Omega}'\, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.4.43}$$

In order now to obtain a determined equation for ${}^{1}f_W^{1}$ from Eq. (2.4.43) it is necessary to express ${}^{1}f_W^{2}$ in terms of ${}^{1}f_W^{1}$. It is not possible to factorize ${}^{T}f_W^{(2)}$ purely on the basis of the argument used in the classical case, which then led to Eq. (2.3.3.21), since the quantum statistical interdependence of the wave functions describing the two particles must now be taken into account. The conditions necessary for expressing ${}^{T}f_W^{(2)}$ in terms of ${}^{T}f_W^{(1)}$ must then be evaluated in terms of the wave functions for the two particles. The discussion of this problem is given in Appendix C, from where it is determined that for two particles before collision whose previous history was uncorrelated and whose wave functions do not overlap one may write, from Eq. (C.11),

$${}^{T}f_W^{(2)} = {}^{T}f_W^{(1)}\, {}^{T}f_W^{(1)}. \tag{2.4.44}$$

If then the sum of the DE BROGLIE halfwavelengths of the two particles, $(\lambda_1/2 + \lambda_2/2)$, is less than the radius, ξ_0, of the interaction sphere the wave functions just before collision do not overlap and Eq. (2.4.44) is valid. However, if $(\lambda_1/2 + \lambda_2/2) > \xi_0$ the wave functions of the two particles do overlap and in retaining ξ_0, the radius of the interaction sphere, as the characteristic property of the phenomenon, it is necessary to include an integral operator such as $[\bigcirc_2]$ of Eq. (A.6) in the expression of ${}^{T}f_W^{(2)}$ in terms of ${}^{T}f_W^{(1)}$. Another possibility would be to alter the definition of ξ_0 from that of the radius of the interaction sphere to the radius ξ_0' of a larger sphere (concentric with the interaction sphere)

and such that $(\lambda_1/2 + \lambda_2/2) < \xi_0'$ so that Eq. (2.4.44) may be retained without a symmetry operator $[\textcircled{1}_{\pm}]$), but this procedure would require a revision of the physical interpretation of the entire truncation technique and might possibly render the truncation technique as an artifice to avoid the difficulties introduced by the operator $[\textcircled{1}_{+}]$ rather than a bona fide technique.

In the following, however, it will be assumed for convenience that indeed

$$\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right) < \xi_0, \tag{2.4.45}$$

so that Eq. (2.4.44) may be used as the equivalent of the molecular chaos assumption of Eq. (2.3.3.21).

Returning now to Eq. (2.4.43) it will be recalled that, from Eq. (2.4.16), the d.f. 's, ${}^{T}f_W^{(2)}$, both describe conditions prior to the collisions, $\boldsymbol{\eta}' \to \boldsymbol{\eta}$, and $\boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{\eta}''$, so that the d.f.. 's may be factorized as in Eq. (2.4.44).

With the approximation that ${}^{T}f_W^{(1)}$ varies sufficiently slowly that one may write $\boldsymbol{r}_1'$, $\boldsymbol{r}_J'$, $\boldsymbol{r}_J = \boldsymbol{r}_1$ and $t' = t$, one then has from Eqs. (2.4.43), (2.4.44) and (2.4.45),

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(1)} =$$

$$= \sum_{J \in \{N-1\}} \int\int [{}^{T}f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1', t)\ {}^{T}f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J', t) -$$

$$- {}^{T}f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\ {}^{T}f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_J, t)]\, \sigma(p_\nu, \beta)\, p_\nu\, d\boldsymbol{\Omega}'\, d\boldsymbol{p}_J. \tag{2.4.46}$$

The function $\sigma(p_\nu, \beta)$ may be interpreted as a differential scattering cross section in that $\sigma(p_\nu, \beta)\, d\boldsymbol{p}_\nu'$, where $d\boldsymbol{p}_\nu' = p_\nu'^2\, dp_\nu'\, d\boldsymbol{\Omega}'$ from Eq. (2.4.40), is the probability that $\boldsymbol{p}_\nu$ is scattered into the solid angle $\boldsymbol{\Omega}'$ to $\boldsymbol{\Omega}' + d\boldsymbol{\Omega}'$, where the polar angle is given by β and the polar axis is along $\boldsymbol{p}_\nu$. The effect of the external field on the scattering process must be taken into account in the calculation of $\sigma(p_\nu, \beta)$.

Equation (2.4.46) is the quantum mechanical counterpart of Eq. (2.3.3.27), but is to be compared to the equation derived by Ross and Kirkwood Eq. (2.2.24) which it formally resembles. These equations and their derivations will be briefly discussed in Sect. 2.5.

To complete this section, the case of a system in which the assumption (2.4.45) is not valid should be mentioned. If the two particles wave functions overlap, but no third particle is so involved, then the symmetry operator must be included in expressing ${}^{T}f_W^{(2)}$ in terms of ${}^{T}f_W^{(1)}$. The symmetry operator $[\textcircled{1}_{\pm}]$, Eq. (A.6), should then be included (c. f. Sect. 2.2) in the function $\sigma(p_\nu, \beta)$ which must be calculated in any event in terms of appropriately symmetrized wave functions for the particles. If, however, the wave functions of the two colliding particles extend over a region sufficiently large that they overlap the wave

functions of particles other than the two colliding particles, then these other particles influence the interaction of the two colliding particles. Under such circumstances, the system of particles is said to be degenerate [3; 15, p. 673]. The effects of degeneracy have not been taken into account in deriving Eq. (2.4.46). In view of the assumption of binary collisions, however, the influence of any third, fourth, etc., particles on the binary collision must be excluded. It would therefore appear that under the binary collision assumption degeneracy may also be excluded from the system.

2.5. The Single Particle D.F. Equation in Quantum Mechanics: A Discussion of Various Derivations

The equation for the single particle d.f., which is intended to describe the behaviour of a degenerate assembly of N particles which suffer only binary collisions, and used among others in the works of Uehling-Uhlenbeck, is generally referred to in the literature as the quantum-mechanical Boltzmann equation or the Uehling-Uhlenbeck equation. Although the latter authors [23] stated this equation in their paper, it was derived from heuristic considerations earlier by Nordheim [20] from the classical Boltzmann equation in connection with the theory of electrons in metals. Nordheim's equation is [see 15, p. 671],

$$\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{X}_1^{(e)}}{m_1} \cdot \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi [f_1^{(1)'} f_2^{(1)'} (1 + \Theta f_1^{(1)}) (1 + \Theta f_2^{(1)}) - f_1^{(1)} f_2^{(2)} (1 + \Theta f_1^{(1)'}) (1 - \Theta f_2^{(1)'})] \alpha(g_{12}, \chi) \sin \chi \, d\chi \, d\boldsymbol{v}_2, \quad (2.5.1)$$

where $f^{(1)}$ is the classical single particle d.f.,

$$f_1^{(1)} = f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1, t), \qquad f_2^{(1)} = f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2, t), \quad (2.5.2)$$

and the prime superscripts on $f_1^{(1)'}$ and $f_2^{(1)'}$ refer to the velocity arguments, $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, resulting from a collision with $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ being the initial velocities. The quantities g_{12} and χ are the initial relative speed, $|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$, and the angle of deflection of the particle trajectory respectively, and $\alpha(g_{12}, \chi)$ is the scattering cross section which is calculated by quantum mechanics. The factor Θ is the statistical factor due to degeneracy, which was mentioned at the end of Sect. 2.4, and is given by

$$\Theta = \left(\frac{h}{m}\right)^3 \frac{\delta}{G}, \quad (2.5.3)$$

where h is Planck's constant, m is the mass of the particle, $\delta = -1, 0, 1$ for the antisymmetric, classical, and symmetric cases respectively, and G is the number of independent quantum states in which the particle possesses the same internal energy.

The statistical factor, Θ, does not appear as a result in Ross and Kirkwoods' analysis, and the conditions of quantum degeneracy which necessitates its introduction have been excluded in the derivation of Eq. (2.4.46).

Ross and KIRKWOOD state that as a result of Eq. (2.2.25), Eq. (2.2.24) reduces to Eq. (2.5.1), (if of course the difference in the representations in terms of $\boldsymbol{p}$ or $\boldsymbol{v}$ is taken into account). It must be noted however that the d.f. of Eq. (2.5.1) is not the WIGNER d.f. $f_W^{(1)}$. WIGNER [25] and GREEN [12] have shown however that at high enough temperatures $f_W^{(1)}$ may be written in terms of the classical d.f. $f^{(1)}$ by means of a series expansion involving even powers of PLANCK's constant, h.

It has been claimed in the literature that Ross and KIRKWOOD's derivation of the single particle d.f. equation is the most general. It would be appropriate then to devote the remainder of this section to a brief comparison of the analyses of Sects. 2.2 and 2.4.

The significant differences between these two derivations of the single particle d.f. equation lie in the treatment of the interparticle forces and the introduction of the condition of molecular chaos.

Concerning interparticle forces, Ross and KIRKWOOD consider them explicitly but invoke the concept of time averaging over a period of time much longer than a collision period in order to remove incomplete collisions. In Sect. 2.4, however, the concept of the truncated d.f., ${}^T f_W^{(1)}$, is introduced which enables one to take into account the effect of a collision at a given instant of time but excludes the explicit treatment of a particle which is, at that instant, interacting with another particle. The restricted domain of applicability of the single particle d.f. equation in terms of ${}^T f_W^{(1)}$ is then formally included in the definition of ${}^T f_W^{(1)}$. It was shown in Sect. 2.3.2 that indeed BOLTZMANN's equation is also restricted to the same domain of applicability although this has not in general been explicitly shown in the elementary derivations.

Concerning the introduction of molecular chaos, there is a clear distinction between the analyses of Ross and KIRKWOOD and of Sect. 2.4. It was shown in Sect. 2.2 that the statistical correlation between the colliding particles must be assumed to be negligible a long time after the collision. But it was shown in the discussion preceding Eq. (2.2.15) that the correlation must in fact be assumed negligible at any time. Considering the former, and less stringent than the latter, assumption, it is difficult to support the concept of lack of correlation between two particles that have collided unless successive collisions with other particles are considered and which destroy the correlation. In Sect. 2.4, such conceptual difficulties are lessened by assuming that correlation of the motions of the two particles is negligible only before collision. The latter assumption has wide support in the literature although no proof in the non-equilibrium case yet exists [11].

Comparing formally the final results of Sects. 2.2 and 2.4, i.e., Eqs. (2.2.24) and (2.2.26), it should be emphasized that the derivation of Sect. 2.4, as compared to that of Sect. 2.2, claims inherent formal simplicity due to the introduction of the truncation procedure, and since only the result of the interaction of the two particles is considered, no perturbation treatment of this interaction is involved as it is in Sect. 2.2.

The cross section $\sigma(p_v, \beta)$ of Eq. (2.4.46) is then more general than that $\sigma(p, \Omega)$ of Eq. (2.2.24) which is the Born approximation collision cross section.

It would appear then that the inclusion of the interparticle forces explicitly in Sect. 2.2 have indeed incurred formal mathematical difficulties which for their solution have led to a less general result than that of Sect. 2.4.

3. The Theory of N-Particle Systems Involving Many-Particle Interactions

3.1. General Remarks

In the analyses of the previous section an N-particle system has been considered in which binary collisions only have been allowed. Furthermore, the truncation procedure as developed in Sects. 2.3 and 2.4 leads to an equation for the single particle d.f. which is valid only in that domain outside the region occupied by, and influenced by, momentarily interacting particles. Indeed, it was shown in Sect. 2.3.2 that Boltzmann's equation is in fact restricted to the same domain of validity, the latter being formally expressed in Eqs. (2.3.2.6) and (2.3.3.2). It was stated in Sect. 2.3.2 [below Eq. (2.3.2.7)] that the formal distinction between $f^{(1)}$ and ${}^{T}f^{(1)}$ may be neglected in certain applications of the Boltzmann equation since the domain of interaction, radius ξ_0, may be small and therefore negligible. However, in particle systems in which the domain of interaction is not small compared, for instance, with the mean distance between the particles, the domain of validity of the truncated single particle d.f. equation may be seriously restricted. Such a restriction may be expected even in dilute particle systems provided that the interparticle forces are sufficiently long range in character, for example the Coulomb forces in an ionized gas. A similar serious restriction would also be evident in a dense particle system, in which, although the interparticle forces may be comparitively short range, a typical particle may spend a relatively large interval of time under interaction with other particles.

Furthermore in systems such as discussed above one may expect with confidence that higher order collisions that binary occur. Thus another assumption necessary for the validity of the final results of Chapter 2 is violated.

The question then naturally arises as to whether a determined equation for some yet-to-be-defined single particle d.f. may be constructed, and which will be valid on a large enough subset of the configatruion space $\{r\}$ occupied by the particle system, so as to be useful. The above question is the foundation for the discussions in the following sections of this chapter, and a model for systems as discussed above will be proposed and analysed in Sect. 3.3. In Sect. 3.2 those theories that have been derived in the past, for such systems, will be briefly reviewed.

3.2. Previous Theories

The salient features of those particle systems to which the final equations of Sects. 2.3.2, 2.3.3 and 2.4 are inapplicable are that the interaction sphere of any particle has a radius which is large compared to the mean separation of the particles in the system, and that (largely as a result of the first feature) in addition to binary collisions one finds that ternary and higher order collisions may take place, or that even no distinct collisions take place due to a particle interacting with many others continuously in time.

Several main approches toward a kinetic theory of the above systems may be mentioned. These approaches have been aimed in the past largely toward a description of liquids, dense gases and gases composed of charged particles (electrons in metals, gaseous plasmas, etc.). Although liquids are not the subject of the present work, it must be emphasized that they possess features which are in common with those of a gas within which many particle interactions take place continuously.

Consider Eq. (1.5.7) which, although expressing the variation of WIGNER's function, may be reduced to the equation describing the variation of the classical d.f., $f^{(n)}$, by replacing $f_W^{(n)}$ by $f^{(n)}$ and expressing the integral operator θ by the corresponding classical differential operator [c.f. Eq. (2.2.25)]. For $n = 1$, one has an equation to determine $f^{(1)}$ provided that $f^{(2)}$ is known. However, whereas in the binary interaction assumption one may assume that $f^{(2)}$ is determined only by the motions of the two particles, when higher order collisions or interactions than binary occur the variation of $f^{(2)}$ is determined by more than two particles. Then $f^{(2)}$ must be determined simultaneously by Eq. (1.5.7) for $n = 2$. In this equation $f^{(3)}$ appears. Thus $f^{(2)}$ may be determined provided that $f^{(3)}$ is known, and so on for $n = 3, 4, \ldots$. In order then to avoid having to solve a system of N simultaneous coupled equations (one for each $n = 1, 2, \ldots N$) it is necessary to cut off this sequence by means of an approximation that allows one to express some $f^{(n+1)}$ in terms of $f^{(n)}$ or lower order d.f. 's. This procedure has been used in the kinetic theory of liquids and dense gases by BORN and GREEN [5], and KIRKWOOD [17] in which $f^{(3)}$ is expressed in terms of $f^{(2)}$ and $f^{(1)}$ so that the sequence is closed after the equation describing the variation of $f^{(2)}$. This approach has not yet been used for the WIGNER equations, Eq. (1.5.7).

Another approach, which has been followed widely in the kinetic theory of liquids and of gases composed of charged particles, is based upon the following assumptions. The change in momentum of a particle in the system due to its interaction with another particle is assumed to be small in comparison to its absolute momentum. The cumulative effect on any particle due to its interaction with several other particles is then assumed to result in a random trajectory for the particle. It may then be assumed that at any instant the state of motion of the particle

is largely independent of its state of motion at another instant. Under these assumptions, a single equation describing the variation of $f^{(1)}$ may be found [1; 9, p. 15] [from the classical equivalent of Eq. (1.5.7)] which is known as the Fokker-Planck equation. Again, no equivalent of the Fokker-Planck equation for the variation of f_n^1 has been derived as yet.

Finally one may mention the attempts to utilize the Boltzmann equation for the description of a gas composed of charged particles. It is usually conceded that the main difficulty of applying the Boltzmann equation to such a particle system lies in the fact that the collision integral (i.e., the term on the R.H.S. of the equation) diverges if the force between two particles i and j is proportional to a power of $1/|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ which is lower than or equal to the second, the latter being the case for two charged particles. In order to circumvent this difficulty a "cut-off", i.e., some limitation on the range, of the interparticle force is imposed [1; 7, p. 177] (for example the Debye shielding distance). Although this cut-off may have some physical justification, the domain of invalidity of Boltzmann's equation, as discussed in Sects. 2.3.2 and 3.1, remains unchanged and indeed may impose serious restrictions on the validity of the treatment of charged particle systems by means of Boltzmann's equation.

3.3. A New Truncation Procedure[8]

It would appear from the discussion in the previous section that there is a deficiency in the kinetic theory of systems in which both many particle weak interactions and strong two-body interactions occur. In this section a model for such systems will be proposed and analysed by means of a generalization of the truncation procedure introduced in Sect. 2.3.1 (and developed in Sects. 2.3.2, 2.3.3, and 2.4). To this end, the region of phase space accessible to all the particles but one in the system will be divided into three domains instead of the two domains of Sect. 2.3.1 (i.e., the domain D and its complement $\bar{D}$). As in Sects. 2.3 and 2.4 these three domains will not subdivide momentum space, only the configuration space (as in Appendix B, Sect. B.2).

The three domains will be distinguished by the superscripts "T", "I", and "C", and they are defined as follows,

$$
\begin{aligned}
&{}^{T}D = \{\boldsymbol{\eta}_k | \boldsymbol{\eta}_k \equiv \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{p}_k;\ \text{all } \boldsymbol{p}_k;\ |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0 \text{ for all } k \in \{N-n-1\}\},\\
&{}^{T}V = \{\boldsymbol{r}_k | |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0 \text{ for all } k \in \{N-n-1\}\}, \qquad (3.3.1)\\
&{}^{I}_{n}D = \{\boldsymbol{\eta}_k | \boldsymbol{\eta}_k \equiv \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{p}_k;\ \text{all } \boldsymbol{p}_k;\ \xi_0 > |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0' \text{ for all } k \in \{n\}\},\\
&{}^{I}_{n}V = \{\boldsymbol{r}_k | \xi_0 > |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0' \text{ for all } k \in \{n\}\}, \qquad (3.3.2)\\
&{}^{C}D = \{\boldsymbol{\eta}_k | \boldsymbol{\eta}_k \equiv \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{p}_k;\ \text{all } \boldsymbol{p}_k;\ |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| < \xi_0' \text{ for any } k \in \{n\}\},\\
&{}^{C}V = \{\boldsymbol{r}_r | \xi_0' > |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \text{ for any } k \in \{n\}\}, \qquad (3.3.3)
\end{aligned}
$$

where "all $\boldsymbol{p}_k$" means that the domains above refer to all values of momenta accessible to all particles in the N-particle system, and $\xi_0 > \xi_0'$.

[8] The idea suggested by M. Z. v. Krzywoblocki.

The set of all points, $\{\boldsymbol{\eta}\}$, constitutes the phase space, $\mathscr{P}$, of the system, i.e., $\prod_{i=1}^{N} ({}^{T}D \cup {}^{I}_{n}D \cup {}^{C}D)_i = \mathscr{P}$.

The distribution functions[9] ${}^{T}f^{(N)}$, ${}^{I}f^{(N)}$, and ${}^{C}f^{(N)}$ are defined on the above three domains in a manner similar to Eqs. (2.3.3.1) to (2.3.3.3). Thus

$$ {}^{T}f^{(N)} \equiv f^{(N)} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{\eta} \in {}^{T}D, \tag{3.3.4} $$

$$ {}^{I}f^{(N)} \equiv f^{(N)} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{\eta} \in {}^{I}_{n}D, \tag{3.3.5} $$

$$ {}^{C}f^{(N)} \equiv f^{(N)} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{\eta} \in {}^{C}D, \tag{3.3.6} $$

$$ {}^{T}f^{(N)} \cup {}^{I}f^{(N)} \cup {}^{C}f^{(N)} = f^{(N)}. \tag{3.3.7} $$

All three d.f. 's defined above are truncated d.f. 's in the sense that they are defined on truncated domains of phase space. The superscript "T" has been retained for use on the d.f. of Eq. (3.3.4) since it refers to a domain in which no particle interacts with particle 1 as in Chapter 2.

The following reduced truncated d.f. 's may be defined,

$$ {}^{T}f^{(n)+(1)} = \int_{{}^{T}D} {}^{T}f^{(N)} \prod_{k\in\{N-n-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int_{{}^{T}D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-n-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{3.3.8} $$

$$ {}^{I}f^{(1)} = \int_{{}^{I}_{n}D} {}^{T}f^{(n)+(1)} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int_{{}^{I}_{n}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int_{{}^{T}D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-n-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{3.3.9} $$

The domains of Eqs. (3.3.1) to (3.3.3) may be given the following physical significance[10]. The region ${}^{T}V$, defined as a subdomain of ${}^{T}D$, is occupied only by particles that are free of any interaction with particle 1. The region ${}^{I}_{n}V$, defined as a subdomain of ${}^{I}_{n}D$, is occupied by n particles that are in simultaneous and continuous interaction with particle 1 and with any incoming particle, but for which this interaction is "weak". The term "weak interaction" will not be quantitatively defined here but it will be understood to mean that although the total force on the particle due its interaction with the set of particles $\{n\}$ may be large, the force between the particle and any one member of the set $\{n\}$ is small in comparison with the total force. As a consequence it may be assumed that the statistical dependency between any member of the set $\{n\}$ and the particle 1 is weak, i.e., the correlation between their phase points is practically zero.

The region ${}^{C}V$ defined by ${}^{C}D$ is of course occupied by the particle 1, and any other particle which enters this region will be understood to

[9] Although the classical and quantum cases are not distinguished in this section the d.f.'s introduced in (3.3.4) to (3.3.7) may be interpreted as those for either case, i.e., $f^{(N)}$ and $f_W^{(N)}$ respectively.

[10] Of course, with essentially the same formalism, many other models may be considered.

be in a "strong" collision with particle 1. It is clear that since any particle which enters ${}^{C}V$ must previously have been in ${}^{I}_{n}V$, this particle must be contributed from the set $\{n\}$. A "strong" collision, although again no quantitative definition will be given, will be understood to mean that any single particle participating in a strong collision with particle 1 influences significantly the motion of the particle 1 and the statistical correlation of their motions is strong. In the subsequent analysis only binary collisions will be allowed in the region ${}^{C}V$.

In order to describe the system discussed above, equations describing the variation of ${}^{T}f^{(n)+(1)}$ and ${}^{I}f^{(1)}$ will be derived. The formal mathematical technique of Chapter 2 will be used for this purpose. The superscript on ${}^{T}f^{(n)+(1)}$ has been written thus to emphasize the special position of particle 1, although one may write ${}^{T}f^{n+1}$ if so desired.

The d.f. 's defined in Eqs. (3.3.8) and (3.3.9) may be defined thus: ${}^{T}f^{(n)+(1)}$ is the d.f. for $(n+1)$ particles when the remaining $\{N-(n-1)\}$ particles in the N-particle system are further from particle 1 than ξ_0: ${}^{I}f^{(1)}$ is the d.f. describing particle 1 when both the $\{N-(n-1)\}$ are outside the interaction sphere of radius ξ_0 and the remaining n particles lie in the weak interaction region between the surfaces of the spheres of radius ξ_0 and ξ_0'.

In the following sections the quantum mechanical case will be considered, i.e., the subscript W must be introduced for the d.f.'s discussed in this section.

3.4. The Equation for ${}^{T}f_{W}^{(n)+(1)}$

Consider first the variation of ${}^{T}f^{(n)+(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{\eta}^{(n)}, t)$, where $\boldsymbol{\eta}^{(n)} \equiv (\boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_{n+1}, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{n+1})$. One has [c. f. Eqs. (2.3.3.10) and (2.3.3.11)], with ${}^{T}f^{(n)+(1)} = {}^{T}f^{(n)+(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_{n+1}, \boldsymbol{p}_{n+1}, t)$,

$$\frac{d\,{}^{T}f^{(n)+(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^{T}f^{(n)+(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{n+1}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \sum_{i\in\{n\}}\frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial\,{}^{I}f^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \cdots$$

$$+ \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} + \sum_{i\in\{n\}}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \tag{3.4.1}$$

where $\boldsymbol{p}_1/m_1 = d\boldsymbol{r}_1/dt$. In the classical case, $d\boldsymbol{p}_i/dt$ may be replaced by the force $\boldsymbol{X}_i$ acting on the i'th particle [c. f. Eq. (2.3.3.11)]. However in the quantum mechanical case, the differential operator $d\boldsymbol{p}_i/dt\cdot\partial/\partial\boldsymbol{p}_i$ in (3.4.1) must be replaced by the integral operator θ_i which from Eq. (1.5.3) may be written

$$\theta_i = \theta_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}\theta_{ij}, \tag{3.4.2}$$

if one may assume that the forces may be represented by the potentials q and $\bar{U}$ as in Eq. (1.5.2). This representation will be assumed valid in the present analysis.

Then Eq. (3.4.1) for the quantum d.f., ${}^{T}f_W^{(n)+(1)}$, may be written

$$\frac{d\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \sum_{i\in\{n\}}{}' \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} +$$
$$+ \theta_1^{(e)}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} + \sum_{j\in\{n\}}{}' \theta_{ij}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} +$$
$$+ \sum_{i\in\{n\}}{}' \theta_i^{(e)}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} + \sum_{j\in\{n\}}{}' \sum_{\substack{j\in\{N\}\\ i<j}}{}' \theta_{ij}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)}, \tag{3.4.3}$$

since $\sum_{j\in\{N-n\}}{}' \theta_{ij}$ is zero (since all particles outside the interaction sphere, radius ξ_0, do not interact with particle 1) and where ${}^{T}f_W^{(n)+(1)}$ is given by

$${}^{T}f_W^{(n)+(1)} = \int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{3.4.4}$$

from Eq. (3.3.8). Evaluation of each term on the R.H.S. of (3.4.3), wherein the expression (3.4.4) will be substituted, may be accomplished by means of the mathematical analyses of Chapter 2 and Appendix B. From (B.1.1), the first term on the R.H.S. of Eq. (3.4.3) is,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{N-n-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int_{{}^{T}D} \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} \prod_{k\in\{N-n-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{3.4.5}$$

For the purpose of evaluating further terms in (3.4.3), the following domains ${}^{T}D_k$ will be defined

$${}^{T}D_k = \{\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k |\ \text{all}\ \boldsymbol{p}_k;\ |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0\}, \qquad \text{for any} \qquad k\in\{N-n-1\}, \tag{3.4.6}$$

so that the domain ${}^{T}D$ may be written as the CARTESIAN product of the domains ${}^{T}D_k$, c. f. Sect. B.2,

$${}^{T}D = {}^{T}D_{n+2}\times {}^{T}D_{n+3}\times \ldots \times {}^{T}D_N. \tag{3.4.7}$$

Furthermore, the domain ${}^{T}D_k$ may be written as the CARTESIAN product

$${}^{T}D_k = \{\boldsymbol{p}_k\}\times {}^{T}V_{1,k}; \qquad {}^{T}V_{1,k} = \{\boldsymbol{r}_k |\ |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0\}, \qquad k\in\{N-n-1\}. \tag{3.4.8}$$

The set $\{N-n-1\}$ will be denoted by $\{M\}$ henceforth for convenience.

If the surface of the region ${}^{T}V_{1,k}$ is denoted by ${}^{T}S_{1,k}$, one has for the second term to be evaluated in (3.4.3), by means of Sect. B.2, Eq. (B.2.20),

$$\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \int_{{}^{T}D} \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k -$$

$$- \sum_{g\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{{}^{T}S_{1,g}} dS \cdot \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \int_{{}^{T}D - {}^{T}D_g} f_W^{(N)} \prod_{\substack{k\in\{M\}\\ k\neq g}} d\eta_k, \tag{3.4.9}$$

where the last integral will be defined thus

$${}^{T}f_W^{(n+1)+(1)} = \int_{{}^{T}D - {}^{T}D_g} f_W^{(N)} \prod_{\substack{k\in\{M\}\\ k\neq g}} d\eta_k. \tag{3.4.10}$$

For the third term on the R.H.S. of (3.4.3) one has, since the domain ${}^{T}D$ is independent of $\boldsymbol{r}_i$, $i\in\{n\}$, from Theorem V,

$$\sum_{i\in\{n\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(N)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \sum_{i\in\{n\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \int_{{}^{T}D} f_W^{(N} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k -$$

$$= \sum_{i\in\{n\}} \int_{{}^{T}D} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k. \tag{3.4.11}$$

The coefficients of the fourth, fifth and sixth terms in (3.4.3) are independent of the variables of integration in (3.4.4) so that

$$\theta_1^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} + \sum_{i\in\{n\}} \theta_{ij} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} + \sum_{i\in\{n\}} \theta_i^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} -$$

$$- \int_{{}^{T}D} \left[\theta_1^{(e)} - \sum_{j\in\{n\}} \theta_{ij} - \sum_{i\in\{n\}} \theta_i^{(e)}\right] \cdot f_W^{(N} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k. \tag{3.4.12}$$

Consider now the final term in (3.4.3). This term may be written

$$\sum_{i\in\{n\}} \sum_{\substack{j\in\{N\}\\ i<j}} \theta_{ij} \cdot \int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k - \sum_{i\in\{n\}} \sum_{\substack{j\in\{n\}\\ i<j}} \theta_{ij} \cdot \int_{{}^{T}D} f_W^{N} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k -$$

$$+ \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot \int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k, \tag{3.4.13}$$

where in the first term on the R.H.S., the function θ_{ij} may be taken inside the integral since it is not dependent on the variables of integration. This may not be done in the second term however, since in that term θ_{ij} is a function of η_k, $k\in\{M\}$. Then one has,

$$\sum_{i\in\{n\}} \sum_{\substack{j\in\{N\}\\ i<j}} \theta_{ij} \cdot \int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k - \int_{{}^{T}D} \sum_{i\in\{n\}} \sum_{\substack{j\in\{n\}\\ i<j}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k -$$

$$+ \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(n)+(1)}. \tag{3.4.14}$$

Substituting all the above results, i.e., Eqs. (3.4.5), (3.4.9) to (3.4.14) into Eq. (3.4.3),

$$\frac{d\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{dt} = \int_{{}^{T}D} \Bigg[\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i\in\{n+1\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i\in\{n+1\}} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{n+1\}} \sum_{\substack{j\in\{n+1\} \\ i<j}} \theta_{ij} \cdot {}^{T}f_W^{(N)} \Bigg] /\!/\!/_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k + \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(n)\,T(1)} - \sum_{g\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{{}^{T}S_{1,g}} \frac{\boldsymbol{p}_1\, {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}}{m_1} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{3.4.15}$$

From WIGNER's equation, Eq. (1.4.6), and the expression for $\theta \cdot f_W^{(N)}$ from Eq. (1.5.3), one has

$$\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i\in\{n+1\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i\in\{n+1\}} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{n+1\}} \sum_{\substack{j\in\{n+1\} \\ i<j}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} = -\Bigg[\sum_{i\in\{N-n-1\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i\in\{N-n-1\}} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{n+1\}} \sum_{j\in\{N-n-1\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{N-n-1\}} \sum_{\substack{j\in\{N-n-1\} \\ i<j}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \Bigg]. \tag{3.4.16}$$

Substituting Eq. (3.4.16), with M written in place of $\{N-n-1\}$, into the R.H.S. of Eq. (3.4.15),

$$\frac{d\,{}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{dt} = -\int_{{}^{T}D} \Bigg[\sum_{i\in\{M\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i\in\{M\}} \theta_i^{(e)} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{n+1\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{M\}} \sum_{\substack{j\in\{M\} \\ i<j}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \Bigg] /\!/\!/_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k + \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} - \sum_{g\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{{}^{T}S_{1,g}} \frac{\boldsymbol{p}_1\, {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}}{m_1} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{3.4.17}$$

Consider first the terms in the integral over ${}^{T}D$ on the R.H.S. of Eq. (3.4.17). The first term may be evaluated as in Sect. B.4 of Appendix B. Thus,

$$\sum_{i\in\{M\}} \int_{{}^{T}D} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} /\!/\!/_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k = -\sum_{i\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_i \int_{{}^{T}S_{1,i}} {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{3.4.18}$$

where ${}_T f_W^{(n+1)+(1)}$ is defined by Eq. (3.4.10). The second term in the integral vanishes by integration over the momenta [see below Eq. (1.5.4)]. The fourth term vanishes by integration over the momenta [see below Eq. (1.5.6)]. The third term will be retained as it stands, although the summation over $i \in \{n+1\}$ may be replaced by the summation $i \in \{n\}$ since particle 1 does not interact with the set $\{M\}$.

With the above results, and combining the surface integrals in Eqs. (3.4.17) and (3.4.18), the former equation becomes

$$\frac{d\,{}_T f_W^{(n)+(1)}}{dt} = -\int_{T\dot{D}} \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{i1} \cdot {}_T f_W^{(n)+(1)} -$$

$$- \sum_{g\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{T\dot{S}_{1,g}} {}_T f_W^{(n+1)+(1)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_g}{m_g} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right) \cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (3.4.19)$$

The above equation may be rearranged so that all the interparticle interaction terms are on the R.H.S. of the equation. From Eq. (3.4.3) one then has,

$$\frac{\partial\,{}_T f_W^{(n)+(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\,{}_T f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \sum_{i\in\{n\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial\,{}_T f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \theta_1^{(e)} \cdot {}_T f_W^{(n)+(1)} +$$

$$+ \sum_{i\in\{n\}} \theta_i^{(e)} \cdot {}_T f_W^{(n)+(1)} = -\sum_{j\in\{n\}} \theta_{1j} \cdot {}_T f_W^{(n)+(1)} - \sum_{i\in\{n\}} \sum_{\substack{j\in\{n\} \\ i<j}} \theta_{ij} \cdot {}_T f_W^{(n)+(1)} -$$

$$- \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int_{T\dot{D}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k +$$

$$+ \sum_{g\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int_{T\dot{S}_{1,g}} {}_T f_W^{(n+1)+(1)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_g}{m_g} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right) \cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (3.4.20)$$

The third term on the R.H.S. of Eq. (3.4.20) may be reduced, as in Eq. (1.5.6), thus

$$\sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int_{T\dot{D}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int_{T\dot{D}_j} \theta_{ij} \cdot {}_T f_W^{(n+1)+(1)} d\boldsymbol{\eta}_i. \qquad (3.4.21)$$

Consider the last term on the R.H.S. of Eq. (3.4.20). The surface integral in this term may be split into two surface integrals, one in which $\boldsymbol{U}_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} > 0$ and the other in which $\boldsymbol{U}_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} < 0$ where

$$\boldsymbol{U}_{g1} = \frac{\boldsymbol{p}_g}{m_g} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}. \qquad (3.4.22)$$

As in Sect. 2.4, these integrals will be expressed as integral transforms involving momenta probability coefficients (the function P in Sect. 2.4). In the surface integral in Eq. (3.4.20), the two cases above correspond to particle g leaving and entering the interaction sphere of particle 1, i.e., $\boldsymbol{U}_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} > 0$ and $\boldsymbol{U}_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} < 0$, respectively, where both integrals are associated with the phase points $\boldsymbol{\eta}$ of the $n+2$ particles, i.e., particle 1 plus n particles plus one incoming or outgoing particle. Following the notation of Sect. 2.4, one has from Eq. (2.4.16),

$$\int_{T\dot{S}_{1,g}} {}_{T}f_{W}^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t)\, \boldsymbol{U}_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \int\int {}_{T}f_{W}^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}_1', \boldsymbol{\eta}_g', t')\, P(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g' | \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})\, d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_g' -$$

$$- \int\int {}_{T}f_{W}^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t)\, P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g | \boldsymbol{p}_1'', \boldsymbol{p}_g''; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})\, d\boldsymbol{p}_1''\, d\boldsymbol{p}_g''. \tag{3.4.23}$$

It will be assumed that the interaction process for which $\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g' \to \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g$, and $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g \to \boldsymbol{p}_1'', \boldsymbol{p}_g''$, is symmetric in inversion so that the state $(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g')$ may be identified with the state $(\boldsymbol{p}_1'', \boldsymbol{p}_g'')$. The sets of phase points $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$, $\boldsymbol{\eta}^{(n)'}$ of the set of particles $\{n\}$ are included in the probability coefficient as parameters. This parametric representation then expresses the dependence of the interaction, which results in particle g leaving or entering the interaction sphere, on the set of particles $\{n\}$.

The following conditions on $P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g | \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})$ may be imposed: (i) to (iv) of Sect. 2.4, i.e., Eqs. (2.4.19), (2.4.20), (2.4.21) and (2.4.22) with respect to the momenta $\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g', \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g$. In particular, from Eq. (2.4.22),

$$P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g | \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}) =$$
$$= P(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_g, \boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_g', \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_g - \boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_g'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}). \tag{3.4.24}$$

Since the total momentum $(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_g)$ of the two particles 1 and g is not conserved in interaction, in view of the influence of the other n particles, condition (v) of Sect. 2.4 is not valid. However, the interaction with the set of particles $\{n\}$ will be taken into account by means of a momentum function (Suggested by M. Z. v. Krzywoblocki).

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})$$

in the following way,

$$|\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_g'| = \mathfrak{M}\,[|\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_g|]. \tag{3.4.25}$$

Introducing the transformations,

$$\boldsymbol{p}_c = (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_g)/2, \qquad \boldsymbol{p}_c' = (\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_g')/2, \tag{3.4.26}$$

$$\boldsymbol{p}_v = (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_g)/2, \qquad \boldsymbol{p}_v' = (\boldsymbol{p}_1' - \boldsymbol{p}_g')/2, \tag{3.4.27}$$

Eq. (3.4.24) may be written

$$P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g | \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}) = P(\boldsymbol{p}_v, \boldsymbol{p}_v', \boldsymbol{p}_c - \boldsymbol{p}_c'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}). \tag{3.4.28}$$

In order that P satisfy condition (vi) of Sect. 2.4, i.e., invariance in rotation, it must be a function of the magnitudes of the vectors $\boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{p}_v'$ and the angle between them, β, and also of the magnitudes of the vectors $\boldsymbol{p}_c$, $\boldsymbol{p}_c'$ and the angle, α, between them. Then Eq. (3.4.28) becomes,

$$P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g | \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}) = P(p_v, p_v', \beta, p_c, p_c', \alpha; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}). \quad (3.4.29)$$

Conservation of energy [condition (vii) of Sect. 2.4], for the two particles is also invalid in view of the interaction of the particles l and g with the set of particles $\{n\}$. The total kinetic energy of the two particles before and after interaction may be shown from Eqs. (3.4.26) and (3.4.27) to be proportional to $(p_c^2 + p_v^2)$ and $(p_c'^2 - p_v'^2)$ respectively. It will be assumed that the ratio of these two quantities is given by an energy function $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})$[11]. When there is no interaction with n other particles then $\mathfrak{E} = 1$, and in view of conservation of momentum in this case, i.e., $\boldsymbol{p}_c = \boldsymbol{p}_c'$, one finds $p_v^2 = p_v'^2$ [c. f. Eq. (2.4.37)]. With the aid of Eqs. (3.4.25) and (3.4.26),

$$p_c'^2 + p_v'^2 = \mathfrak{E}(p_c^2 + p_v^2), \qquad |\boldsymbol{p}_c'| = \mathfrak{M}|\boldsymbol{p}_c|, \quad (3.4.30)$$

i.e.,

$$p_v'^2 = p_v^2 \left[\mathfrak{E} + \frac{p_c^2}{p_v^2} (\mathfrak{E} - \mathfrak{M}^2) \right] = p_v^2 \, \Xi (\mathfrak{E}, \mathfrak{M}, p_c/p_v). \quad (3.4.31)$$

Introducing the relations (3.4.25) and (3.4.31) into the expression (3.4.29) by means of delta functions (c. f. 2.4.37),

$$P(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g | \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g'; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}) =$$

$$= \sigma(p_v, \beta, p_c, \alpha; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}) \, \delta_1(\mathfrak{M} p_c - p_c') \, \delta_1\left(\frac{\Xi p_v^2 - p_v'^2}{2} \right). \quad (3.4.32)$$

Substituting the above expression (3.4.32), into the R.H.S. of Eq. (3.4.23) and observing the conditions (i) to (iv) of Sect. 2.4, Eq. (3.4.23) becomes,

$$\int_{T S_{1,g}} {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t) \, U_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} - \int \int \int {}^{T}f_W^{(n-1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}_1', \boldsymbol{\eta}_g', t') -$$

$$- {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t)] \, \sigma(p_v, \beta, p_c, \alpha; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)}) \times$$

$$\times \delta_1(\mathfrak{M} p_c - p_c') \, \delta_1\left(\frac{\Xi p_v^2 - p_v'^2}{2} \right) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g')}{\partial(\boldsymbol{p}_v', \boldsymbol{p}_c')} \right| d\boldsymbol{p}_v' \, d\boldsymbol{p}_c', \quad (3.4.33)$$

where, as in Eq. (2.4.32), the Jacobian of the transformation is unity. From Eq. (2.4.40), the volume elements $d\boldsymbol{p}_v'$ and $d\boldsymbol{p}_c'$, in their respective momentum spaces, may be expressed in terms of solid angles $d\boldsymbol{\Omega}_\beta'$ and $d\boldsymbol{\Omega}_\alpha'$ about the angles β and α with polar axes along $\boldsymbol{p}_v$ and $\boldsymbol{p}_c$, respectively. Thus,

$$d\boldsymbol{p}_v' = p_v'^2 \, dp_v' \, d\boldsymbol{\Omega}_\beta', \quad (3.4.34)$$

$$d\boldsymbol{p}_c' = p_c'^2 \, dp_c' \, d\boldsymbol{\Omega}_\alpha'. \quad (3.4.35)$$

[11] Suggested by M. Z. v. Krzywoblocki.

Introducing Eqs. (3.4.34) and (3.4.35) into the R.H.S. of Eq. (3.4.33) and integrating over p_c' and p_v', since by the definition (2.4.36),

$$\int\int \delta_1(\mathfrak{M} p_c - p_c')\,\delta\left(\frac{\Xi p_v^2 - p_v'^2}{2}\right) p_v'^2\, p_c'^2\, dp_v'\, dp_c' =$$

$$= \int\int \delta_1(\mathfrak{M} p_c - p_c')\, 2\,\delta(\Xi p_v^2 - p_v'^2)\,\frac{p_v'}{2}\, p_c'^2\, d(p_v'^2)\, dp_c' = \mathfrak{M}^2 \Xi^{1/2} p_v p_c^2, \tag{3.4.36}$$

one has for Eq. (3.4.33),

$$\int_{T\dot{S}_{1,g}} {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t)\, \boldsymbol{U}_{g1} \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \int\int [{}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}_1', \boldsymbol{\eta}_g', t') - {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t)] \cdot$$

$$\cdot \sigma(p_v, \beta, p_c, \alpha; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})\, \mathfrak{M}^2 \Xi^{1/2} p_v p_c^2\, d\boldsymbol{\Omega}_\alpha'\, d\boldsymbol{\Omega}_\beta', \tag{3.4.37}$$

where the momenta in the arguments of ${}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}$ are given by,

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_c + \boldsymbol{p}_v, \qquad \boldsymbol{p}_g = \boldsymbol{p}_c - \boldsymbol{p}_v. \tag{3.4.38}$$

Substituting Eqs. (3.4.21) and (3.4.37) into Eq. (3.4.20), the latter becomes,

$$\frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \sum_{i \in \{n\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial\, {}^{T}f_W^{(n)+(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \theta_1^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} +$$

$$+ \sum_{i \in \{n\}} \theta_i^{(e)} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} = - \sum_{j \in \{n\}} \theta_{ij} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} - \sum_{i \in \{n\}} \sum_{\substack{j \in \{n\} \\ i<j}} \theta_{ij} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} -$$

$$- \sum_{i \in \{n\}} \sum_{j \in \{M\}} \int_{{}^{T}D_j} \theta_{ij} \cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)}\, d\boldsymbol{\eta}_j +$$

$$+ \sum_{g \in \{M\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int\int [{}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}_1', \boldsymbol{\eta}_g', t') -$$

$$- {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_g, t)]\, \sigma(p_v, \beta, p_c, \alpha; \boldsymbol{\eta}^{(n)'}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})\, \mathfrak{M}^2 \Xi^{1/2} p_v p_c^2 \times$$

$$\times d\boldsymbol{\Omega}_\alpha'\, d\boldsymbol{\Omega}_\beta'. \tag{3.4.39}$$

In order, now, to obtain a determined equation for ${}^{T}f_W^{(n)+(1)}$ it is necessary to express the function ${}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}$ in terms of ${}^{T}f_W^{(n)+(1)}$ and a single particle d.f. The single particle d.f. in question refers to the particle g, in the last integral term of Eq. (3.4.39), and to the particle j in the second last term of the same equation. These particles may be assumed to be described by ${}^{I}f_W^{(1)}$, a function which for particle 1 will be discussed in the following section.

Whereas in classical mechanics, and under appropriate conditions for the binary interaction in quantum mechanics, Eq. (2.4.44), the higher order d.f.'s may be expressed in terms of the lower order d.f.'s simply by factorization on the basis of "molecular chaos", this may not be done in quantum mechanical systems in general. A careful analysis must be made of the symmetry properties of the wave functions of the various particles participating in the multiple interactions. Lacking such an analysis, which is considered to be beyond the scope of the present paper, the equation (3.4.39) will be left in the above form.

The terms involving θ_{ij} may be evaluated further by means of self-consistent field theory [14] in which the fields due to all the other particles acting on one particle may be replaced by a single field represented by a potential which is a function only of the position of the one particle considered.

Eq. (3.4.39), describing the variation of the truncated function ${}^{T}f_W^{(n)\,\tau(1)}$ differs considerably from the original Boltzmann equation derived in the nineteenth century. For this reason, it seems justified to attach a different name to this equation. As an appropriate name, one may propose that of "the doubly-truncated distribution function equation", leaving the name of n-tuple truncated distribution function equation for the possible generalization of this equation, discussed in Chapter 4.

3.5 The Equation for ${}^{I}f_W^{(1)}$

Consider, first, as in Sect. 3.4, the variation of ${}^{I}f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$. One has [c. f. Eq. (3.4.1)],

$$\frac{d\,{}^{I}f^{(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^{I}f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{I}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}\cdot\frac{\partial\,{}^{I}f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}_1}, \tag{3.5.1}$$

where as before $\boldsymbol{p}_1/m_1 = d\boldsymbol{r}_1/dt$, and $d\boldsymbol{p}_1/dt \cdot \partial/\partial \boldsymbol{p}_1$ must be replaced by the operator θ_1 in the quantum mechanical case where the operator θ_1 is given by

$$\theta_1 = \theta_1^{(e)} + \sum_{i \in \{n\}} \theta_{ij}, \tag{3.5.2}$$

where the summation extends only over the set $\{n\}$, in the region ${}^{I}_{n}D$, with which particle 1 only interacts. Then one has

$$\frac{d\,{}^{I}f_W^{(1)}}{dt} = \frac{\partial\,{}^{I}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{I}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{I}f_W^{(1)} + \sum_{j \in \{n\}} \theta_{ij}\cdot {}^{I}f_W^{(1)}, \tag{3.5.3}$$

where ${}^{I}f_W^{(1)}$ is given by Eq. (3.3.9),

$${}^{I}f_W^{(1)} = \int_{{}^{I}_{n}D} \prod_{k \in \{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int_{{}^{T}D} f_W^{(N)} \prod_{k \in \{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{3.5.4}$$

where $\{M\} = \{N - n - 1\}$.

From (B.1.1) one has for the first term in (3.5.3),

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^T D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int\limits_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^T D} \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{3.5.5}$$

The domain ${}_n^I D$ may be written as the CARTESIAN product of the domains ${}_n^I D_k$, $k \in \{n\}$, which are defined thus,

$${}_n^I D_k = \{\boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{p}_k |\ \text{all}\ \boldsymbol{p}_k;\ \xi_0 > |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0'\}, \qquad \text{for any} \qquad k \in \{n\}, \tag{3.5.6}$$

and

$${}_n^I D_k = \{\boldsymbol{p}_k\} \times {}_n^I V_{1,k}, \tag{3.5.7}$$

where ${}_n^I V_{1,k}$, whose surface will be denoted by ${}_n^I S_{1,k}$, is given by

$${}_n^I V_{1,k} = \{\boldsymbol{r}_k | \xi_0 > |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0'\}, \qquad \text{for any} \qquad k \in \{n\}. \tag{3.5.8}$$

Then,

$${}_n^I D = {}_n^I D_2 \times {}_n^I D_3 \times \ldots \times {}_n^I D_{n+1}, \tag{3.5.9}$$

since $k \in \{n\}$ means $k = 2, 3, \ldots, n+1$. The second term on the R.H.S. of Eq. (3.5.3) may now be written (see Section B.2 of Appendix B), with $(\boldsymbol{p}_1/m_1)\, f_W^{(N)} = \boldsymbol{A}$ and Eq. (3.4.6),

$$\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \int\limits_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^T D} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \cdot \int\limits_{{}_n^I D_2} d\boldsymbol{\eta}_2 \int\limits_{{}_n^I D_3} d\boldsymbol{\eta}_3 \int \ldots \int\limits_{{}_n^I D_{n+1}} d\boldsymbol{\eta}_{n+1} \int\limits_{{}^T D_{n+2}} d\boldsymbol{\eta}_{n+2} \int \ldots \int\limits_{{}^T D_N} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N. \tag{3.5.10}$$

Application of the analytical procedure of Appendix B, Sect. B.2, to the R.H.S. of (3.5.10) leads to the following results. First,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \cdot \int\limits_{{}_n^I D_2} d\boldsymbol{\eta}_2 \int \ldots \int\limits_{{}^T D_N} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N = \int\limits_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \left| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \cdot \int\limits_{{}^T D} \boldsymbol{A} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k \right| -$$

$$- \sum_{g\in\{n\}}{}' \int d\boldsymbol{p}_g \int\limits_{{}_n^I S_{1,g}} d\boldsymbol{S} \cdot \int\limits_{{}_n^I D - {}_n^I D_g} \prod_{\substack{k\in\{n\} \\ k\neq g}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^T D} \boldsymbol{A} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{3.5.11}$$

The first term on the R.H.S. of (3.5.11) may be evaluated in the same manner, and one has,

$$\int_{{}_nD}^{I} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \left[\frac{\partial}{\partial r_1} \cdot \int_{{}_TD}^{} A \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k \right] =$$

$$= \int_{{}_nD}^{I} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}_TD}^{} \frac{\partial}{\partial r_1} \cdot A \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k -$$

$$- \sum_{k\in\{M\}} \int^{} dp_k \int_{{}_nD}^{I} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}_TS_{1,k}}^{} dS \cdot \int_{{}_TD - {}_TD_k}^{} A \prod_{\substack{k\in\{M\} \\ k\neq h}} d\eta_k. \tag{3.5.12}$$

With the definition (3.4.10) invoked for the last term of Eq. (3.5.12) and with the following definition [see Eq. (3.3.9)],

$${}^{I}f_W^{(2)} = \int_{{}_nD - {}_nD_g}^{I} \prod_{\substack{k\in\{n\} \\ k\neq g}} d\eta_k \int_{{}_TD}^{} f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k, \tag{3.5.13}$$

invoked for the last term of Eq. (3.5.11), then Eq. (3.5.12) is substituted in Eq. (3.5.11) to give

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \cdot \int^{} \cdots \int^{} \cdots \int^{} A \, d\eta_N = \frac{p_1}{m_1} \cdot \frac{\partial\, {}^{I}f_W^{(1)}}{\partial r_1} =$$

$$= \int_{{}_nD}^{I} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}_TD}^{} \frac{p_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial r_1} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k -$$

$$- \sum_{k\in\{M\}} \int^{} dp_k \int_{{}_nD}^{I} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}_TS_{1,k}}^{} {}_{T}f_W^{(n+1)+(1)} \frac{p_1}{m_1} \cdot dS -$$

$$\sum_{s\in\{n\}} \int^{} dp_s \int_{{}_nS_{1,s}}^{I} {}^{I}f_W^{(2)} \frac{p_1}{m_1} \cdot dS. \tag{3.5.14}$$

The third term on the R.H.S. of Eq. (3.5.3) is given by [c. f. Eq. (3.4.12)],

$$\theta_1^{(e)} \cdot {}^{I}f_W^{(1)} = \int_{{}_nD}^{I} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}_TD}^{} \theta_1^{(e)} \cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k. \tag{3.5.15}$$

As in Eq. (3.4.13), the final term in Eq. (3.5.3) will be retained as it stands for the present.

When the equations (3.5.5), (3.5.14), and (3.5.15) are substituted into Eq. (3.5.3), the following equation is obtained

$$\frac{d\,{}^{I}f_W^{(1)}}{dt} = \int\limits_{{}_{I}^{n}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}_{T}D} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k \left[\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot f_W^{(N)}\right] -$$

$$- \sum_{h\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_h \int\limits_{{}_{I}^{n}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}_{T}S_{1,h}} \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\,{}_{T}f_W^{(n+1)+(1)}\cdot d\boldsymbol{S} -$$

$$- \sum_{g\in\{n\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int\limits_{{}_{I}^{n}S_{1,g}} {}^{I}f_W^{(2)}\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot d\boldsymbol{S} + \sum_{\epsilon\{n\}} \theta_{ij}\cdot {}^{I}f_W^{(1)}. \qquad (3.5.16)$$

From WIGNER's equation, Eq. (3.4.16), one has for the expression in the square brackets in Eq. (3.5.16),

$$\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot f_W^{(N)} = -\left[\left(\sum_{i\in\{n\}} + \sum_{i\in\{M\}}\right)\frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i\in\{n\}} + \sum_{i\in\{M\}}\right)\theta_i^{(e)}\cdot f_W^{(N)} + \sum_{\substack{i\in\{N\}\\ i<j}}\sum_{j\in\{N\}} \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)}\right]. \qquad (3.5.17)$$

With the substitution of Eq. (3.5.17), the first term on the R.H.S. of Eq. (3.5.16) becomes,

$$- \int\limits_{{}_{I}^{n}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}_{T}D} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k \left[\sum_{i\in\{n\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i\in\{M\}} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i\in\{n\}} \theta_i^{(e)}\cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{M\}} \theta_i^{(e)}\cdot f_W^{(N)} + \sum_{\substack{i\in\{N\}\\ i<j}}\sum_{j\in\{N\}} \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)}\right]. \qquad (3.5.18)$$

Consider the first term in the integrand. The contribution of this term to the above integral may be written, see Eqs. (B.4.1) and (B.4.2) of Appendix B (with interchange of order of integration),

$$- \sum_{i\in\{n\}} \int\limits_{{}_{T}D} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}_{I}^{n}D} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i}\cdot\frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k =$$

$$= - \sum_{i\in\{n\}} \int\limits_{{}_{T}D} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int d\boldsymbol{p}_i \int\limits_{{}_{I}^{n}D - {}_{I}^{n}D_i} \prod_{\substack{k\in\{n\}\\ k\neq i}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}_{I}^{n}V_{1,i}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} f_W^{(N)}\, d\boldsymbol{r}_i =$$

$$= \sum_{i\in\{n\}} \int \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k \int d\boldsymbol{p}_i \int_{{}_I^I D - {}_I^I D_i} \prod_{\substack{k\in\{n\}\\ k\neq i}} d\eta_k \int_{{}_n^I S_{1,i}} f_W^{(N)} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot d\boldsymbol{S} -$$

$$= \sum_{i\in\{n\}} \int d\boldsymbol{p}_i \int_{{}_n^I S_{1,i}} {}^I f_W^{(2)} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{3.5.19}$$

by the definition (3.5.13).

Similarly, for the second term in (3.5.18),

$$- \sum_{i\in\{M\}} \int_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}^T D} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_W^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k =$$

$$= \sum_{i\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_i \int_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}^T S_{1,i}} {}^I f_W^{(n+1)} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m_i} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{3.5.20}$$

The third and fourth terms in (3.5.18) vanish by integration over the momenta [see below Eq. (1.5.4)] and one has for the fifth term in the integrand, by separation of the summations, i.e., $\sum_{i\in\{N\}} \equiv 1 + \sum_{i\in\{n\}} + \sum_{i\in\{M\}}$, etc.,

$$\sum_{\substack{i\in\{N\}\\ i<j}} \sum_{j\in\{N\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} = \Big[\sum_{j\in\{n\}} \theta_{ij} \cdot + \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot + \sum_{\substack{i\in\{n\}\\ i<j}} \sum_{j\in\{n\}} \theta_{ij} \cdot +$$

$$+ \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot + \sum_{\substack{i\in\{M\}\\ i<j}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot \Big] f_W^{(N)}, \tag{3.5.21}$$

where the second term on the R.H.S. is zero since the particle 1 does not interact with the set of particles $\{M\}$. The third and fifth terms vanish when integrated over the momenta, as below Eq. (1.5.6), so that the contribution of (3.5.21) in the integral of Eq. (3.5.18) becomes

$$\int_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}^T D} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k \Big[\sum_{\substack{i\in\{N\}\\ i<j}} \sum_{j\in\{N\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \Big] -$$

$$- \int_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}^T D} \Big[\sum_{j\in\{n\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} + \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \Big] \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k =$$

$$= - \int_{{}_n^I D} \sum_{j\in\{n\}} \theta_{ij} \cdot {}^T f_W^{(n)+(1)} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k -$$

$$- \int_{{}_n^I D} \prod_{k\in\{n\}} d\eta_k \int_{{}_n^I D} \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij} \cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\eta_k, \tag{3.5.22}$$

where ${}^T f_W^{(n)+(1)}$ is defined by Eq. (3.3.8).

Substituting Eqs. (3.5.19), (3.5.20), (3.5.22) into the expression (3.5.18) and introducing the result in place of the first integral expression in (3.5.16), the latter equation becomes

$$\frac{d\,{}^{I}f_W^{(1)}}{dt} = \sum_{g\in\{n\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int\limits_{{}_{n}^{I}S_{1,g}} {}^{I}f_W^{(2)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_g}{m_g} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right)\cdot d\boldsymbol{S} + \sum_{h\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_h \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \times$$

$$\times \int\limits_{{}^{T}S_{1,h}} {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_h}{m_h} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right)\cdot d\boldsymbol{S} + \sum_{j\in\{n\}} \theta_{ij}\cdot {}^{I}f_W^{(1)} -$$

$$- \sum_{j\in\{n\}} \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \theta_{ij}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k -$$

$$- \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^{T}D} \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \qquad (3.5.23)$$

The above equation may be rearranged so that all the interparticle interaction terms are on the R.H.S. of the equation. From Eq. (3.5.3) then,

$$\frac{\partial\,{}^{I}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\,{}^{I}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{I}f_W^{(1)} = \sum_{g\in\{n\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int\limits_{{}_{n}^{I}S_{1,g}} {}^{I}f_W^{(2)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_g}{m_g} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right)\cdot d\boldsymbol{S} +$$

$$- \sum_{h\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_h \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^{T}S_{1,h}} {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)} \left(\frac{\boldsymbol{p}_h}{m_h} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\right)\cdot d\boldsymbol{S} -$$

$$- \sum_{i\in\{n\}} \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \theta_{ij}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k -$$

$$- \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^{T}D} \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \qquad (3.5.24)$$

The last term may, as in Eq. (3.4.21), be further reduced,

$$- \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^{T}D} \theta_{ij}\cdot f_W^{(N)} \prod_{k\in\{M\}} d\boldsymbol{\eta}_k =$$

$$= - \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int\limits_{{}_{n}^{I}D} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{{}^{T}D_j} \theta_{ij}\cdot {}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}\, d\boldsymbol{\eta}_j. \qquad (3.5.25)$$

Consider the surface integral terms in Eq. (3.5.24). The first term refers to a strong collision of two particles, and may be treated by the same analysis as given in Sect. 2.4 which resulted in the expression (2.4.42). Denoting the cross section for the present case by $\sigma(p_\varrho, \gamma')$, where p_ϱ is the magnitude of the relative momentum of the two particles, and γ' is the angle through which the relative momentum may be scattered, one then has for this first term,

$$\sum_{g\in\{n\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int [{}^{I}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_g', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g', t') - {}^{I}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_g, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g, t)]\, \sigma(p_\varrho, \gamma')\, p_\varrho\, d\boldsymbol{\Omega}_{\gamma'}\, d\boldsymbol{p}_g. \tag{3.5.26}$$

The second surface integral term in Eq. (3.5.24) is given by the analysis of Sect. 3.4, resulting in the Eq. (3.4.37). Then substituting Eqs. (3.4.37), (3.5.25) and (3.5.26) into Eq. (3.5.24), the latter becomes

$$\frac{\partial\, {}^{I}f_W^{(1)}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial\, {}^{I}f_W^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \theta_1^{(e)}\cdot {}^{I}f_W^{(1)} = \sum_{g\in\{n\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int [{}^{I}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_g', \boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_g', t') -$$

$$- {}^{I}f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_g, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_g, t)] \times \sigma(p_\varrho, \gamma)\, p_\varrho\, d\boldsymbol{\Omega}_{\gamma'}\, d\boldsymbol{p}_g +$$

$$+ \sum_{h\in\{M\}} \int d\boldsymbol{p}_h \int_{{}_nD} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\int [{}^{I}f_W^{(n-1)+1}\ \boldsymbol{\eta}', t') -$$

$$- {}^{I}f_W^{(n+1)+(1)}(\boldsymbol{\eta}, t)]\, \sigma(p_1, \beta, p_2, \alpha; \boldsymbol{\eta}'^{(n)}, \boldsymbol{\eta}^{(n)})\, \mathfrak{M}^2\, \Xi^{1,2}\, p_1\, p_2^{\,2}\, d\boldsymbol{\Omega}_{z'}\, d\boldsymbol{\Omega}_{\gamma'} -$$

$$- \sum_{j\in\{n\}} \int_{{}_nD} \theta_{ij}\cdot {}^{T}f_W^{(n)+(1)} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k -$$

$$- \sum_{i\in\{n\}} \sum_{j\in\{M\}} \int_{{}_nD} \prod_{k\in\{n\}} d\boldsymbol{\eta}_k \int_{{}^{T}D_j} \theta_{ij}\cdot {}^{I}f_W^{(n+1)+(1)}\, d\boldsymbol{\eta}_{n+1}. \tag{3.5.27}$$

In order to obtain a determined equation for ${}^{I}f_W^{(1)}$ it is then necessary to express ${}^{I}f_W^{(2)}$ in terms of ${}^{I}f_W^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_1, t)$ and ${}^{I}f_W^{(1)}(\boldsymbol{\eta}_2, t)$, and similarly ${}^{T}f_W^{(n+1)+(1)}$ must be factorized as discussed at the end of Sect. 3.4. Again this requires wave function symmetry considerations which will not be given in this paper. Self-consistent field theory [14] may be invoked for those terms containing the functions θ_{ij} in Eq. (3.5.27).

Eqs. (3.4.39) and (3.5.27) constitute a system of simultaneous equations for doubly truncated distribution functions for the phenomena in question.

It is obvious that the model presented above may be generalized in that one can propose more than two spheres of interaction. The generalization is straightforward and the technique presented above is definitely sufficient to allow one to derive the system of equations for n-tuple truncated functions.

4. Particle Systems with Generalized Interactions

4.1. General Discussion

In this final chapter, a survey of the kinetic theory of many particle systems will be made, particularly in relation to the method of analysis developed in the preceding chapters and to the extension of this analysis to more general systems than previously considered.

It is evident that in constructing a theory which may describe some aspects of the complex behaviour of a system of many particles interacting between themselves and with an external field, certain restrictions and approximations must be invoked in order to render the theoretical analysis manageable and, invariably, meaningful and useful.

The restrictions are often imposed upon the system before the formalism is developed so that the latter is restricted from the beginning, and furthermore does not exhibit these restrictions explicitly. A generalization to describe a less restricted system is then sometimes attempted by removing the corresponding restrictions on the interpretation of the results of what was initially (and inherently) a restricted formalism. An example of such a generalization is the Uehling-Uhlenbeck equation which is an heuristic extension of the classical Boltzmann equation.

It is clearly desirable that a generalization to a less restricted system should involve the corresponding generalization of the concepts used in constructing the formalism, and that any remaining restrictions should be clearly defined in the latter. In an attempt to meet these requirements, the concept of a truncated distribution function has been used, in Chapters 2 and 3, which not only allows an explicit definition of the domain of validity of the equations resulting from the analysis, but invites an explicit treatment of the results of particle interactions and, indeed, provides a natural basis for the generalization of particle interactions as will be discussed in a later section.

For the purpose of the following discussions, the content of a kinetic theory of many particle systems will be classified into the following items: concepts, parameters and variables of system description; particle species and interactions; principles of particle dynamics and statistical considerations; system models. These items will be the subjects of discussion of the next four sections and summarized briefly in Appendix D.

4.2. System Description

A particle in a system is described by its internal structure and configuration, its state and its mode of interaction with other particles in the system or with the system's surroundings. The state of the particle has been defined classically by the position and momentum of the particle, whereas in the quantum formalism the state is described by the wave function of the particle. The mode of interaction of the particle is then described through the equations of motion, classical

or quantum, by means of a function, the potential, of the positions of the considered particle and all other particles.

The system of particles is described by a distribution function, which in both classical and quantum mechanics is defined on the space of generalized coordinates and generalized momenta. Whereas a point in this space refers to the state of a particle in classical mechanics, it cannot directly in quantum mechanics and the distribution function must be related to the state of the particle by means of the wave function.

4.3. Particle Species and Interactions

4.3.1. Generalized Interactions and Mixtures

The most important properties of a particle are its structure and manner of interaction with other particles or fields. Particle interactions may be conveniently classified into two groups. One group refers to those interactions among the various particles comprising the particle system, i.e., interparticle interactions, and the other group refers to those interactions of a particle within the system with a field originating in sources external to the system, i.e., interactions with an external field.

The simplest case of interaction is that in which a force acts upon the particle, thus determining its motion, but as a result of the interaction the internal structure of the particle is not modified or changed. Such interactions, which may be described as elastic, are the ones that have been considered in this paper. These interactions have been described by forces representable by potentials, which have been assumed to be unmodified by the presence of an arbitrary number of particles. Thus, the potentials, or potential energies, associated with the interparticle and external forces have been assumed to be additive, and furthermore, the potential of the interparticle force for any two particles in the system has been assumed to be a function only of the distance between the particles. The potential of the external field has been assumed to be a function only of the position of a particle. The above characteristics of the particle interaction are embodied in Eq. (1.5.2), which has been assumed valid throughout this paper.

The simple type of interaction discussed above imposes a serious restriction on the class of systems to which the analysis of this paper may be applied. In order to generalize this application it is necessary to generalize the particle interactions in two ways.

First, the representation of the forces by potentials must be extended to admit dependence of these potentials on the internal configuration or the orientation of the particles, on the particle velocity, and on the presence of other particles. These extensions are necessary for the inclusion of magnetic interactions (velocity dependent) and nuclear forces [4, p. 119] which are spin and velocity dependent and also depend on the presence of other particles (e.g., saturable forces).

Secondly, the interactions must be extended to include inelastic interactions of all types, i.e., those in which not only may the internal

configuration or structure of the particle be modified but also completely changed, leading to the production of new particles. Such changes are associated with either the electronic structure, which will be denoted by "atomic reactions", or with the nuclear structure, which will be denoted by "nuclear reactions". In the category of atomic reaction one has ionization, dissociation and electronic energy level excitations. In the category of nuclear reactions [4, p. 311] one finds not only the production of new particles by rearrangement of those particles constituents initially present, but also the production of new particles at the expense of the energy of the interacting particles.

It is clear that when any type of reaction occurs, more than one species of particle becomes present in the system. The analysis in this paper has been restricted to structurally homogeneous systems of particles described by a single class of distribution functions, $f^{(N)}$ to $f^{(1)}$. A prerequisite, then, for the extension of the analysis to include reactions is the necessary generalization of the formal theory of the preceding chapters to particle mixtures. This generalization involves the introduction of distribution functions each describing a given type of particle. Equations describing the variation of each distribution function would include in the interparticle interaction terms [e.g., the R.H.S. of Eq. (3.4.39)] the various distribution functions for the different particle interacting species. The kinetic theory for mixtures has been developed [7, p. 134] along lines similar to the elementary derivation of BOLTZMANN's equation (c. f. Sect. 2.3.2) but a derivation from LIOUVILLE's equation or WIGNER's equation is presently lacking.

4.3.2. Multi-truncation and Generalized Cross Sections

The concept of a truncated distribution function as developed in Chapter 3 provides a natural basis for the treatment of generalized interactions. By means of the truncated distribution functions of Sects. 3.3, 3.4 and 3.5 a classification of the type of interparticle interactions was introduced explicitly in the formalism by the interpretation of the various domains upon which the d.f.'s were defined. In that formalism a double-truncation procedure was introduced to allow a formal separation of weak and strong interactions as defined in Sect. 3.3.

The above double-truncation procedure suggests that a multi-truncation procedure might be introduced to allow a description of the various levels of interaction enumerated in Sect. 4.3.1, each of which would be allowed to occur in separate domains which might be defined not only in configuration space but also in momentum space. The truncation on momentum space could be introduced to describe an atomic or nuclear reaction characterized by a "threshold", or minimum energy for its initiation.

The equations describing the hierarchy of multi-truncated d.f.'s would involve surface integrals over the interaction spheres or domains. Since these spheres or domains essentially isolate the interaction so that only the end products of interaction must be accounted for, the gen-

eralization of interactions in the analysis requires the wider interpretation of the probability coefficients and resulting cross-sections. The relation between the surface integral, probability coefficient and cross section must be investigated for each type of interaction considered.

4.4. Particle Dynamics and Statistics

Formally, the derived final equations may be referred both to the classical and quantum approaches. The formal mathematical difference between these two approaches lies in: (i) the terms containing the interparticle forces, which are expressible by means of different operators [c. f. Eqs. (2.2.25), (2.4.5)]; (ii) the cross sections, which differ in their calculation and definition; (iii) the different interpretation or definition of the distribution functions.

In the classical case, the distribution function directly gives the probability of finding the precise location and precise momentum of a particle. In the quantum case, the motion of a particle being determined by the Schrödinger equation, the distribution function must be interpreted through the wave function.

The particle dynamics and statistics for classical systems as applied to the kinetic theory of gases, i.e., in the sense of Boltzmann systems, are very well known [15] and do not need discussion here.

The particle dynamics and statistics of quantum systems as applied to the kinetic theory of gases is not at present mastered in all the details. The purpose of the present work is to cast some light on what problems are encountered in this application. A method of formal analysis has been proposed in this paper for dealing with the kinetic theory of gases on the quantum level, but one aspect in particular is not yet clearly understood. This is the level of description the above formalism will furnish, i.e., whether on the level of microscopic quantum systems or on the level of macroscopic fluid dynamic systems. This problem currently represents one of the crucial problems of fluid dynamics and will not be discussed here.

There arises an important question: under which conditions may one apply the classical formalism and under which conditions must one apply the quantum formalism? This question involves the relation of the results of classical and quantum kinetic theory, a relation that has not yet been clarified. In some particular examples the conditions for application of either formalism may be discussed. Two important distinctions between the formalisms are apparent in the results of an interaction between particles and the description of the state of a particle, which in classical formalism is in terms of the position and momentum and in quantum formalism is in terms of the wave function.

Consider the motion of a particle interacting with a field due to other particles or sources external to the particle system. The motion of the particle is determined by Schrödinger's equation. Under certain circumstances [22, p. 120], it is possible to adequately describe the motion by means of classical mechanics, which may be regarded as being

embedded in the quantum mechanics. Thus, if the force field changes by a small amount over that region in which the wave function describing the particle is not negligible, then the motion of the particle may be described adequately by means of classical mechanics. The region over which the wave function is not negligible is usually measured in its spacial extent by means of the De Broglie wavelength. For two interacting particles the region cannot be made smaller than the reduced De Broglie wavelength, λ,

$$\lambda = \frac{h}{\mu v}, \tag{4.4.1}$$

where μ is the reduced mass, $m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, h is Planck's constant and v is the relative velocity of the two particles [22, p. 120]. Introducing the energy, E, associated with the relative motion,

$$E = \frac{\mu}{2} v^2, \tag{4.4.2}$$

one has from Eq. (4.4.1),

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\mu E}}. \tag{4.4.3}$$

It is clear from Eq. (4.4.3) that in order for a quantum mechanical description to be necessary the reduced mass, μ, and the energy, E, must be small. Without going into a detailed analysis, it may be mentioned that the masses and energies of molecular particles are too large to necessitate the use of quantum mechanics except for a small number of cases corresponding, in particular, to Helium and Hydrogen at very low particle energies, i.e., at low temperatures [3, p. 38; 15, p. 674]. Such cases involve condensed particle systems which are not of central interest to this paper. However, for particles of mass much smaller than molecular masses, such as electrons, the reduced De Broglie wavelength may be of the order of the range of interparticle forces or extent of significant variation of the field in which the particle moves. Furthermore, in interactions involving nuclear forces (which are very short range), the particle dynamics must be investigated by means of quantum mechanics.

When particle interactions occur in which the internal structure or configuration of a particle is changed, a classical description of the interaction is always incomplete. This is a result of the fact that the particle structure can be satisfactorily described only by means of quantum mechanics.

Finally, consider the particle statistics [3, p. 11]. The allowed states, defined by the wave function ψ, of particles in the system must be symmetric (Bose-Einstein statistics) or antisymmetric (Fermi-Dirac statistics) in the exchange of coordinates of identical particles. There is an apparent repulsion of particles in an antisymmetric assembly, and an apparent attraction between particles of a symmetric assembly.

In order that these effects should become appreciable, the De Broglie wavelength of any particle in a group under consideration must be of at least the same order as the separation of the particles in the group, i.e., that the wave functions of the particles in the group overlap to some extent. If such circumstances prevail throughout the particle system, involving the common overlapping of several particles at any point, the system is degenerate. No general kinetic theory of degenerate systems exists. If however the effects of wave function symmetry properties occur during binary interactions it is shown by Appendix C that these effects may be included in the cross section. As a result it would appear that the density dependent symmetry effects should appear explicitly (such as in the Uehling-Uhlenbeck equation) only in the equations describing interactions involving more than two particles.

4.5. System Models

It was mentioned in Sect. 4.1 that certain restrictions and approximations are necessary in constructing a kinetic theory of many particle systems.

Consider first a classical system. A first restriction that is usually made is to that of a classical mechanical formalism, i.e., the starting point is Liouville's equation or an elementary classical model. Two further alternative restrictions are then usually made. Thus a reduction is made either to a model system of non-interacting particles in which only the results of an interparticle interaction, but not the interaction process itself, are made explicit (e.g., Boltzmann's equation) or, a reduction is made to what may be considered a single particle model in which the motion of any one particle is determined by an average interaction associated with many other particles in the actual system (e.g., Fokker-Planck equation).

Kinetic theories of various gaseous systems have been based on the above models (using the classical formalism). These theories have been used in an attempt to describe the macroscopic dynamics and transport properties (electrical and thermal conductivity, viscosity, diffusion coefficients) of the various systems.

Of the many pioneering works and significant developments in constructing the above theories, one may mention the following examples, which are all based essentially on Boltzmann's equation:

Dilute, single and multiple species, non-reacting gas. (Grad [10; 11], Green [12; 13], Kirkwood [17]; also see references in [15], Chapman & Cowling [7].)

Dense gases. (Enskog [15, p. 634], Curtiss [15, p. 634].)

Dilute, polyatomic gas. (Wang-Chang, Uhlenbeck [15, p. 501].)

Dilute ionized gases (Chapman and Enskog [7]).

Electron gases (also Fokker-Planck equation) (Allis [1]); single particle model (Vlassov [24]).

The kinetic theory of gases using the quantum formalism has, up to the present, appeared only in its early development stages. The system model of non-interacting particles (the BOLTZMANN model) has been investigated primarily by ROSS and KIRKWOOD [21], and by MORI and ONO [18]. An extension of the classical theory in attempt to introduce the concepts of quantum mechanics in this model was made by NORDHEIM [20], and UEHLING and UHLENBECK [23]. Their analysis was however, not based on the quantum formalism but simply on the elementary classical derivation of BOLTZMANN's equation. The single particle model (e.g., FOKKER-PLANCK) as extended to quantum systems is in a rudimentary stage of development [9].

In the present work an attempt has been made in Chapter 3, for the first time from BOLTZMANN's period to provide a basic formalism of a kinetic theory for quantum and classically mechanically described systems upon which a treatment of systems more general than those represented by the two alternative models above may be constructed. For example a system was considered in Chapter 3 within which both many particle weak interactions in addition to strong two-body interactions may occur. The extension to generalized interactions has been discussed in Sect. 4.3.

The purpose of the basic formalism of Chapter 3 it to provide a formal basis for the construction of models, by means of multi-truncated distribution functions, which may not be as restricted in concept or execution as those of the two reductions mentioned earlier in this section. Thus, the effects of many-body "inside" interactions (without the effects of particle's crossing the interaction sphere) are primarily located in the terms involving θ_{ij}, and in the probability coefficients, whereas the results of strong and weak interactions (with the particles crossing an interaction sphere) and, in particular, reactions, involve surface integrals over the domains of interaction. Since a quantum formalism is adopted ab initio the treatment of reactions, in which the structure of a particle is altered, is natural. In particular, the "channel" theory of nuclear reactions [4, p. 311] (WIGNER), in which surface integrals of the probability current density over the nuclear (or interaction) surface are a central item, would provide a natural and logical method of introducing, into the kinetic theory, nuclear reactions by means of the truncation procedure.

The formalism of Chapter 3, as generalized in the manner discussed in the present chapter, may then provide a rigorous formal basis for the treatment of an ionized gas supporting atomic and nuclear reactions.

In Appendix D a tabular summary of the kinetic theories discussed in this paper is given.

Bibliography

1. ALLIS, W. P., Motions of Ions and Electrons. Handbuch der Physik. Volume 21. Berlin: Springer-Verlag. 1956.

2. Apostol, T. M., Mathematical Analysis. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley. 1957.
3. Band, W., An Introduction to Quantum Statistics. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Co., Inc. 1955.
4. Blatt, J. M. and Weisskopf, V. F., Theoretical Nuclear Physics. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1952.
5. Born, M. and Green, H. S., A General Kinetic Theory of Liquids. Cambridge, 1949.
6. Caratheodory, C., Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig: Teubner. 1927. S. 664.
7. Chapman, S. and Cowling, T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge: University Press, 1952.
8. Dirac, P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics. Oxford: University Press. 1947.
9. Eisenschitz, R., Statistical Theory of Irreversible Processes. Oxford: University Press. 1958.
10. Grad, H., On the Kinetic Theory of Rarefied Gases. Comm. Pure and App. Math. II, **331** (1949).
11. Grad, H., Principles of the Kinetic Theory of Gases. Handbuch der Physik. Volume 12. Berlin: Springer-Verlag. 1958.
12. Green, H. S., The Quantum Mechanics of Assemblies of Interacting Particles. J. Chem Phys. **19**, 955 (1951).
13. Green, M. S., Boltzmann Equation from the Statistical Mechanical Point of View. J. Chem. Phys. **25**, 836 (1956).
14. Haar, D. Ter., Introduction to the Physics of Many-Body Systems. New York: Interscience. 1958.
15. Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F. and Bird, R. B., Molecular Theory of Gases and Liquids. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1954.
16. Irving, J. H. and Zwanzig, R. W., The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes. V. Quantum Hydrodynamics. J. Chem. Phys. **19**, 1173 (1951).
17. Kirkwood, J. G., The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes. I. General Theory. J. Chem. Phys. **14**, 180 (1946).
18. Mori, H. and Ono, S., Quantum Statistical Theory of Transport Phenomena. Prog. Theoret. Phys. **8**, 327 (1952).
19. Moyal, J. E., Quantum Mechanics as a Statistical Theory. Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
20. Nordheim, L. W., On the Kinetic Method in the New Statistics and its Application in the Electron Theory of Conductivity. Proc. Roy. Soc. (London) A **119**, 689 (1928).
21. Ross, J. and Kirkwood, J. G., The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes. VIII. Quantum Theory of Transport in Gases. J. Chem. Phys. **22**, 1094 (1954).
22. Schiff, L. I., Quantum Mechanics. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1949.
23. Uehling, E. A. and Uhlenbeck, G. E., Transport Phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac Gases — I. Phys. Rev. **43**, 552 (1933).
24. Vlassov, A., On the Kinetic Theory of an Assembly of Particles with Collective Interaction. J. Phys. (U.S.S.R.) **9**, 25 (1945).
25. Wigner, E., On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. Phys. Rev. **40**, 749 (1932).

Appendix A

The wave function ψ_{k1} for a free particle may be expanded [22, p. 48] in terms of the momentum eigenfunctions $\phi_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)$.

$$\psi_{k1}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_{k1}(\boldsymbol{p}_1, t)\, \phi_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)\, d\boldsymbol{p}_1, \tag{A.1}$$

where

$$\phi_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1}, \tag{A.2}$$

and k refers to the particular member of the ensemble discussed in Sect. 1.3, and $a_{k1}(\boldsymbol{p}_1, t)$ is the expansion coefficient for the wave function. The wave function $\psi_k^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)$ for two such independent particles is the symmetric, (+), or anti-symmetric, (−), combination of $\psi_{k1}^{(1)}$ and $\psi_{k2}^{(1)}$ [3, p. 7],

$$\psi_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{k1}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, t)\, \psi_{k2}^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, t) \pm \psi_{k1}^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, t)\, \psi_{k2}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, t)]. \tag{A.3}$$

Then from Eq. (A.1), the above equation may be expressed in terms of the momentum eigenfunctions,

$$\psi_k^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_{k1}\, a_{k2} [\phi_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)\, \phi_2(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2) \pm \phi_1(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_1)\, \phi_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_2)]\, d\boldsymbol{p}_1\, d\boldsymbol{p}_2. \tag{A.4}$$

Since the density matrix for the two particles may be written, c. f. Eq. (1.3.1),

$$\rho^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \sum_k^{\Gamma} w_k \psi_k^{(2)*}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'; t)\, \psi_k^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t), \tag{A.5}$$

then the density matrix may be expressed in terms of the a's and ϕ's from Eq. (A.4) and the d.f. $f_W^{(2)}$ calculated by means of Eq. (1.4.2), with $N = 2$, from the $\varrho^{(2)}$ so expressed as above. Now expressing the a's in terms of the wave function $\psi^{(1)}$ by taking the FOURIER transform of Eq. (A.1) one finds expressions for the single particle d.f.'s, $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$ and $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)$, in the integrand on the R.H.S. of the expression for $f_W^{(2)}$ calculated in the manner described above from Eqs. (A.4), and (A.5). Thus, $f_W^{(2)}$ cannot be expressed as a simple product of $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)$ and $f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)$ but must be written as follows [21],

$$f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, t) = [\Phi_\pm]\, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t), \tag{A.6}$$

where $[\Phi_\pm]$ is an integral operator involving an integrand consisting of products of ϕ's originating from Eq. (A.4). Since the explicit expression for $[\Phi_\pm]$, which involves 28 factors and 6 separate integrations, will not be used in this present paper, any further reference is made to ROSS and KIRKWOOD's paper [21].

Appendix B

In the following, integrals appearing in the equations for $d^T f^{(1)}/dt$ during the reduction procedures of Sects. 2.3.3 and 2.4, and also certain sections in Chapter 3, will be evaluated. Where it is appropriate, all functions discussed below are

understood to satisfy the conditions of Theorems I to VII, but at various points in the sections below the theorems will be referred to explicitly.

B.1 Evaluation of $$\frac{\partial}{\partial t}\int_D f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k.$$

From Theorems IV and V one has, identifying the domain P' with D,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D f^{(N)} \sum_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int_D \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{B.1.1}$$

B.2 Evaluation of $$\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int_D f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k.$$

Consider first the definition of a CARTESIAN product [2, p. 39]:

If $A, B, C, \ldots Q$, are sets of any kind, and n in number, the collection of ordered n-tuples $(a, b, c, \ldots, q)$ in which $a \in A$, $b \in B$, $c \in C, \ldots q \in Q$, is defined as the n-fold CARTESIAN product of the n sets $A, B, C, \ldots, Q$ and is denoted by $A \times B \times C \times \ldots \times Q$.

Consider the domains D_k which are defined as follows

$$D_k = \{\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{r}_k| \text{ all } \boldsymbol{p}_k; |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0\}, \qquad k \in \{N-1\}, \tag{B.2.1}$$

and the region $V_{1,k}$ defined as a subset of D_k,

$$V_{1,k} = \{\boldsymbol{r}_k| \, |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0\}, \qquad k \in \{N-1\}. \tag{B.2.2}$$

The domain D_k may be written as the following CARTESIAN product,

$$D_k = \{\boldsymbol{p}_k\} \times V_{1,k}. \tag{B.2.3}$$

The regions $V_{1,k}$, $k = 2, 3, \ldots, N$, are defined in the common three-dimensional space $\{x\}$ of all the particles, and the subscript 1 on $V_{1,k}$ indicates that the region is defined by the point r referring to the particle 1. The domain D,

$$D = \{\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta} \equiv \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}; \text{ all } \boldsymbol{p}, |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_k| \geqslant \xi_0, \qquad k \in \{N-1\}, \tag{B.2.4}$$

may be written as the following CARTESIAN product,

$$D = D_2 \times D_3 \times \ldots \times D_N. \tag{B.2.5}$$

In the following analysis, the notation below will be used for the domains of integration,

$$\int_D F \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int_{D_2\times D_3\times\ldots\times D_N} F \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k =$$

$$= \int_{D_2} d\boldsymbol{\eta}_2 \int_{D_3} d\boldsymbol{\eta}_3 \int \ldots \int_{D_N} F \, d\boldsymbol{\eta}_N, \tag{B.2.6}$$

and

$$\int_{D-D_g} F \prod_{\substack{k\in\{N-1\}\\ k\neq g}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int_{D_2\times D_3\times\ldots\times D_{g-1}\times D_{g+1}\times\ldots\times D_N} F \sum_{\substack{k\in\{N-1\}\\ k\neq g}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{B.2.7}$$

where F is some function of $\boldsymbol{\eta}$. Furthermore, the domain of integration for $\boldsymbol{p}_k$ will be implicitly understood as that of all momenta accessible to any particle in the system.

One may now proceed with the evaluation of the term

$$\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int\limits_{D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{B.2.8}$$

Let the vector $\boldsymbol{p}_1 f^{(N)}/m_1$ be represented as $\boldsymbol{A}$, then the following integral term is to be evaluated in this section,

$$\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int\limits_{D} f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\int\limits_{D_2} d\boldsymbol{\eta}_2\int\limits_{D_3} d\boldsymbol{\eta}_3\int\cdots\int\limits_{D_N}\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_2, \tag{B.2.9}$$

where $\boldsymbol{A}_2$ is defined below.

Consider the following integrals,

$$\boldsymbol{A}_2 = \int\limits_{D_2} d\boldsymbol{\eta}_2\int\limits_{D_3} d\boldsymbol{\eta}_3\int\cdots\int\limits_{D_N}\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N, \tag{B.2.10}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \int\limits_{D_3} d\boldsymbol{\eta}_3\int\cdots\int\limits_{D_N}\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N, \tag{B.2.11}$$

and the general term

$$\boldsymbol{A}_g = \int\limits_{D_g} d\boldsymbol{\eta}_g\int\limits_{D_{g+1}} d\boldsymbol{\eta}_{g+1}\int\cdots\int\limits_{D_N}\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N. \tag{B.2.12}$$

The relation between successive integrals is then

$$\boldsymbol{A}_g = \int\limits_{D_g}\boldsymbol{A}_{g+1}\, d\boldsymbol{\eta}_g. \tag{B.2.13}$$

From Theorem V, if all $\boldsymbol{A}_g$ satisfy the conditions for I, I', Theorems III, IV,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_g = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\int\limits_{D_g}\boldsymbol{A}_{g+1}\, d\boldsymbol{\eta}_g = \int d\boldsymbol{p}_g\int\limits_{V_{1,g}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_{g+1}\, d\boldsymbol{r}_g - \int d\boldsymbol{p}_g\int\limits_{S_{\boldsymbol{r}_1,g}}\boldsymbol{A}_{g+1}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{B.2.14}$$

Consider the 1st term on the R.H.S. of Eq. (B.2.14). Then with g and $g+1$ in Eq. (B.2.14) replaced by $g+1$ and $g+2$ respectively one has from Eq. (B.2.14),

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_{g+1} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\int\limits_{D_{g+1}}\boldsymbol{A}_{g+2}\, d\boldsymbol{\eta}_{g+1} = \int\limits_{D_{g+1}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_{g+2}\, d\boldsymbol{\eta}_{g+1} - \\ - \int d\boldsymbol{p}_{g+1}\int\limits_{S_{\boldsymbol{r}_1,g+1}}\boldsymbol{A}_{g+2}\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{B.2.15}$$

where the integrals in the first term on the R.H.S. of Eq. (B.2.14) have been written thus:

$$\int d\boldsymbol{p}_g\int\limits_{V_{1,g}}\cdots d\boldsymbol{r}_g \equiv \int\limits_{D_g}\cdots d\boldsymbol{\eta}_g.$$

From Eqs. (B.2.14) and (B.2.15),

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_g=\int_{D_g} d\boldsymbol{\eta}_g \int_{D_{g+1}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_{g-2}\, d\boldsymbol{\eta}_{g-1} - \int d\boldsymbol{p}_g \int_{S_{\boldsymbol{r}_1,g}} \boldsymbol{A}_{g-1}\cdot d\boldsymbol{S} - \\ - \int d\boldsymbol{p}_{g+1} \int_{D_g} d\boldsymbol{\eta}_g \int_{S_{\boldsymbol{r}_1,g+1}} \boldsymbol{A}_{g+2}\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{B.2.16}$$

where the expression $\partial/\partial \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{A}_{g-2}$ in the first term may be expanded again with $g+2$ in place of $g+1$ and $g+3$ in place of $g+2$ in Eq. (B.2.15). Thus the process may be repeated over the successive domains $D_2, D_3, \ldots, D_N$, resulting in an $(N-1)$-multiple integral over the domain D and $(N-1)$ surface integrals. From Eq. (B.2.12), in which $g+2$ is written for g, the surface integral term on $S_{1,g+1}$ (replacing $\boldsymbol{r}_1$ by 1 in the subscript) in Eq. (B.2.16) may be written by Theorem II,

$$\int d\boldsymbol{p}_{g+1} \int_{D_g} d\boldsymbol{\eta}_g \int_{S_{1,g+1}} \boldsymbol{A}_{g+2}\cdot d\boldsymbol{S} = \\ -\int d\boldsymbol{p}_{g-1} \int_{S_{1,g+1}} \left[\int_{D_g} d\boldsymbol{\eta}_g \int_{D_{g+2}} d\boldsymbol{\eta}_{g+2} \int_{D_{g+3}} d\boldsymbol{\eta}_{g+3} \cdots \int_{D_N} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{\eta}_N \right]\cdot d\boldsymbol{S} - \\ = \int d\boldsymbol{p}_{g+1} \int_{S_{1,g+1}} d\boldsymbol{S}\cdot \int_{D_2\times D_{g+2}\times\cdots\times D_N} \boldsymbol{A} \prod_{k\in\{N-(g+1)\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{B.2.17}$$

Then for Eq. (B.2.9) one has from the repeated process of Eq. (B.2.16),

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_2 - \int_{D_2} d\boldsymbol{\eta}_2 \int_{D_3} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_3\, d\boldsymbol{\eta}_3 - \int d\boldsymbol{p}_2 \int_{S_{1,2}} \boldsymbol{A}_3\cdot d\boldsymbol{S} \\ - \int d\boldsymbol{p}_3 \int_{D_3} d\boldsymbol{\eta}_3 \int_{S_{1,3}} \boldsymbol{A}_4\cdot d\boldsymbol{S}, \tag{B.2.18}$$

where $\partial/\partial \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{A}_4$ is further expandable as discussed previously. The integrals containing the surface integrals may be expressed in terms of $\boldsymbol{A}$ by means of Eq. (B.2.17), and one finds for the typical term

$$\int d\boldsymbol{p}_g \int_{S_{1,g}} d\boldsymbol{S}\cdot \int_{D-D_g} \boldsymbol{A} \prod_{\substack{k\in\{N-1\}\\ k\neq g}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{B.2.19}$$

In the above manner, Eq. (B.2.9) reduces to

$$\frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int_D f^{(N)} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\int_D \boldsymbol{A} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A}_2 - \\ \int_D \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{A} \prod_{k\in\{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \sum_{g\in\{N-1\}}{}' \int d\boldsymbol{p}_g \int_{S_{1,g}} d\boldsymbol{S}\cdot \int_{D-D_g} \boldsymbol{A} \prod_{\substack{k\in\{N-1\}\\ k\neq g}} d\boldsymbol{\eta}_k, \tag{B.2.20}$$

with D in the 1st term given by Eq. (B.2.4).

The joint probability distribution function for two particles which are not in interaction with any particles is given by

$$ {}^{T}f^{(2)} = {}^{T}f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_g, \boldsymbol{p}_g, t) = \int\limits_{D-D_g} f^{(N)} \prod\limits_{\substack{k \in \{N-1\} \\ k \neq g}} d\boldsymbol{\eta}_k. \tag{B.2.21} $$

Thus Eq. (B.2.20) becomes, with $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}_1/m_1 f^{(N)}$

$$ \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} \int\limits_D f^{(N)} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int\limits_D \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k - $$

$$ - \sum_{g \in \{N-1\}} \int d\boldsymbol{p}_g \int\limits_{S_{1,g}} {}^{T}f^{(2)} \frac{\boldsymbol{p}_1}{m_1} \cdot d\boldsymbol{S}. \quad \text{Q.E.D.} \tag{B.2.22} $$

B.3 Evaluation of $\boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \int\limits_D f^{(N)} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k$.

$\boldsymbol{X}_1^{(e)}$ is a function of $\boldsymbol{r}_1$ only, and by Theorems IV and V the order of integration and differentiation may be interchanged provided $f^{(N)}$ satisfies the conditions of Theorems IV and V. Then

$$ \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \int\limits_D f^{(N)} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int\limits_D \boldsymbol{X}_1^{(e)} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_1} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k. \quad \text{Q.E.D.} \tag{B.3.1} $$

B.4 Evaluation of $\int\limits_D \frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_J} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k$, where $J \in \{N-1\}$.

By Theorem II,

$$ \int\limits_D \frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_J} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = \int d\boldsymbol{p}_J \int\limits_{D-D_J} \prod\limits_{\substack{k \in \{N-1\} \\ k \neq J}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{V_{1,J}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_J} \cdot \frac{\boldsymbol{p}_J f^{(N)}}{m_J} d\boldsymbol{r}_J, \tag{B.4.1} $$

where by Theorem VII,

$$ \int\limits_{V_{1,J}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_J} \cdot \frac{\boldsymbol{p}_J f^{(N)}}{m_J} d\boldsymbol{r}_J = - \int\limits_{S_{1,J}} \frac{f^{(N)} \boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{B.4.2} $$

Substituting (B.4.2) in (B.4.1),

$$ \int\limits_D \frac{\boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{r}_J} \prod\limits_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = - \int d\boldsymbol{p}_J \int\limits_{D-D_J} \prod\limits_{\substack{k \in \{N-1\} \\ k \neq J}} d\boldsymbol{\eta}_k \int\limits_{S_{1,J}} \frac{f^{(N)} \boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot d\boldsymbol{S} = $$

$$ = - \int d\boldsymbol{p}_J \int\limits_{S_{1,J}} \frac{{}^{T}f^{(2)} \boldsymbol{p}_J}{m_J} \cdot d\boldsymbol{S}, \tag{B.4.3} $$

where $Tf^{(2)}$ is defined by Eq. (B.2.21). Q.E.D.

B.5 Evaluation of $\int_D \boldsymbol{X}_J^{(e)} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_J} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k$, where $J \in \{N-1\}$.

$\boldsymbol{X}_J^{(e)}$ is a function of $\boldsymbol{r}_J$ only so that the term may be written by Theorem II,

$$\int_D \boldsymbol{X}_J^{(e)} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_J} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k - \int_{D-D_J} \prod_{\substack{k \in \{N-1\} \\ k \neq J}} d\boldsymbol{\eta}_k \int_{V_{1,J}} d\boldsymbol{r}_J \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_J} \cdot \boldsymbol{X}_J^{(e)} f^{(N)} \, d\boldsymbol{p}_J, \tag{B.5.1}$$

from Theorem VII,

$$\int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_J} \cdot \boldsymbol{X}_J^{(e)} f^{(N)} \, d\boldsymbol{p}_J = \left[- \int_{Sp} \boldsymbol{X}_J^{(e)} f^{(N)} \cdot d\boldsymbol{S}\, p \right]_{|\boldsymbol{p}| \to \infty}, \tag{B.5.2}$$

where $d\boldsymbol{S}\, p$ is an element of the surface $S\, p$ in momentum space $\boldsymbol{p}_J$. In order to find the value of (B.5.2) consider spherical polar coordinates p, θ_p, q_p in momentum space. Then,

$$\left[\int_{Sp} \boldsymbol{X}_J^{(e)} f^{(N)} \cdot d\boldsymbol{S}\, p \right]_{|\boldsymbol{p}| \to \infty} = \left[\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{X}_J^{(e)} \cdot \boldsymbol{\eta}_p f^{(N)} \, p^2 \sin \theta_p \, d\theta_p \, dq_p \right], \tag{B.5.3}$$

where $\boldsymbol{\eta}_p$ is the unit normal to the surface $d\boldsymbol{S}\, p$.

As it is well known, if $f^{(N)}$ approaches zero faster than p^{-2} as $|\boldsymbol{p}| \to \infty$ then the above term is zero. It will be assumed that $f^{(N)}$ behaves in this manner, so that

$$\int \boldsymbol{X}_J^{(e)} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \boldsymbol{p}_J} \prod_{k \in \{N-1\}} d\boldsymbol{\eta}_k = 0. \quad \text{Q.E.D.} \tag{B.5.4}$$

Appendix C

The density matrix for two particles from Eq. (1.3.1) may be written, with $N = 2$ and $\boldsymbol{\eta}_\alpha \equiv \boldsymbol{r}$ [see also below Eq. (1.4.2)], $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$,

$$\rho^{(2)} = \sum_{k=1}^{\Gamma} w_k \psi_k^{(2)*} \psi_k^{(2)}, \tag{C.1}$$

where $\psi_k^{(2)} = \psi_k^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t)$ is the wave function for the k'th member of the ensemble; c. f. [21].

WIGNER's d.f., $f_W^{(2)}$, for the two particles is given, from Eq. (C.1) and Eq. (1.4.2), by

$$f_W^{(2)} = \left(\frac{1}{\pi \hbar} \right)^6 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2i}{\hbar} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y}} \rho^{(2)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{y}; \boldsymbol{r} + \boldsymbol{y}; t) \, d\boldsymbol{y}. \tag{C.2}$$

It is possible to rewrite Eq. (C.1) as follows:

$$\rho^{(2)} = \sum_{k=1}^{\Gamma} \Psi_k^* (\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'; t) \, \Psi_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t), \tag{C.3}$$

and to represent Ψ as a linear combination of an orthonormal set χ_ν of stationary solutions of the time independent SCHRÖDINGER equation [22, p. 48], i.e.,

$$\Psi_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, t) = \sum_\nu a_{k\nu}\, \chi_\nu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2), \tag{C.4}$$

and with Eq. (C.3) one has

$$\rho^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t) = \sum_\nu \sum_\mu A_{\nu,\mu}\, \chi_\nu^*(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2')\, \chi_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2), \tag{C.5}$$

where $A_{\nu,\mu}$ is time dependent in general and is only diagonal in equilibrium conditions (where $A_{\nu,\nu} \sim e^{-E\nu/kT}$), and

$$A_{\nu,\mu} = \sum_k a_{k\nu}^*\, a_{k\mu}. \tag{C.6}$$

Now one may express $\chi_\nu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ in terms of the individual wave functions for the two particles, $u_\nu(\boldsymbol{r}_1)$ and $v_\nu(\boldsymbol{r}_2)$. $\chi_\nu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ must be expressed as a symmetric or antisymmetric (+ and − respectively) combination,

$$\chi_\nu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_\nu(\boldsymbol{r}_1)\, v_\nu(\boldsymbol{r}_2) \pm u_\nu(\boldsymbol{r}_2)\, v_\nu(\boldsymbol{r}_1)]. \tag{C.7}$$

From Eqs. (C.5) and (C.7), the density matrix becomes

$$\rho^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t) = \sum_\nu \sum_\mu \frac{A_{\nu,\mu}}{2} [u_\nu^*(\boldsymbol{r}_1') v_\nu^*(\boldsymbol{r}_2') \pm u_\nu^*(\boldsymbol{r}_2')\, v_\nu^*(\boldsymbol{r}_1')] \cdot$$

$$\times [u_\mu(\boldsymbol{r}_1)\, v_\mu(\boldsymbol{r}_2) \pm u_\mu(\boldsymbol{r}_2)\, v_\mu(\boldsymbol{r}_1)] =$$

$$= \sum_\nu \sum_\mu \frac{A_{\nu,\mu}}{2} \{[u_\nu^*(\boldsymbol{r}_1')\, u_\mu(\boldsymbol{r}_1)\, v_\nu^*(\boldsymbol{r}_2')\, v_\mu(\boldsymbol{r}_2) + u_\nu^*(\boldsymbol{r}_2')\, u_\mu(\boldsymbol{r}_2)\, v_\nu^*(\boldsymbol{r}_1')\, v_\mu(\boldsymbol{r}_1)] \pm$$

$$\pm [u_\nu^*(\boldsymbol{r}_1')\, u_\mu(\boldsymbol{r}_2)\, v_\nu^*(\boldsymbol{r}_2')\, v_\mu(\boldsymbol{r}_1) + u_\nu^*(\boldsymbol{r}_2')\, u_\mu(\boldsymbol{r}_1)\, v_\nu^*(\boldsymbol{r}_1')\, v_\mu(\boldsymbol{r}_2)]\}. \tag{C.8}$$

If the coordinates of the particles do not overlap, i.e., the wave packets representing the particles in $\boldsymbol{r}$ space do not overlap, the last two terms in Eq. (C.8) are zero [22, p. 219]. It will be seen that the first two terms are identical if no distinction may be made between the two particles. Thus, if the particles are identical and their motions are independent, i.e., before collision [c.f. argument leading to Eq. (2.3.2.22)], the density matrix may be factored to give

$$\rho^{(2)}(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; t) = \rho^{(1)}(\boldsymbol{r}_1'; \boldsymbol{r}_1, t)\, \rho^{(1)}(\boldsymbol{r}_2'; \boldsymbol{r}_2, t), \tag{C.9}$$

where $\varrho^{(1)}$ is given by

$$\rho^{(1)}(\boldsymbol{r}_1'; \boldsymbol{r}_1, t) = \sum_\nu \sum_\mu A_{\nu,\mu}^{1/2}\, u_\nu^*(\boldsymbol{r}_1')\, u_\mu(\boldsymbol{r}_1), \tag{C.10}$$

and similarly for $\varrho^{(1)}(\boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{r}_2, t)$. The FOURIER transform [see Eq. (1.4.2)] of Eq. (C.9) then gives

$$f_W^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, t) = f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t)\, f_W^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t), \tag{C.11}$$

when the wave functions of the two particles before interaction do not overlap.

Appendix D

A given particle system may be classified by the following items: (1) Type of particle; (2) Type of particle interaction: classical, quantum, elastic or inelastic (an inelastic interaction may result in internal excitation and or atomic or nuclear reaction within the particle), and interaction with external field.

A brief summary of a classification of particle systems is given in the following two tables together with their associated kinetic theory models. These two tables are not intended to be exhaustive, but rather are to serve as a guide in relating a particle system of interest to the analyses discussed in the present paper. Thus, for illustrative purposes, a dissociated or ionized reacting gas may be associated with items 1.6 or 2.4 in the tables, and non-reacting air with 1.2, where the approach by means of the truncated d.f. has not yet been developed.

Classification of Particle Systems

Table 1. Kinetic Theory Based on Classical Formalism

Particle			System Model	
Structure	Species	Interaction [Mechanics of Interaction]	Model equation	Macroscopic description: present status
1.1 Invariant (No change in molecular, atomic, nuclear structure)	Single (Electrically neutral) Mon-poly-atomic molecules and fundamental particles	Elastic Binary collision [Classical]	Boltzmann	Developed
			Truncated D.F. See Sect. 2.3	Undeveloped
1.2 Invariant (No change in molecular, atomic, nuclear structure)	Mixture (Similar types as above)	Elastic Binary collision [Classical]	Boltzmann See Sect. 4.3.1 [7, p. 134]	Developed
			Truncated D. F. (Undeveloped)	
1.3 Invariant (No change in molecular, atomic, nuclear structure)	Mixture (Electrically charged) ions, electrons, nuclear particles	Elastic Binary collision [Classical] and External Electromagnetic field [Classical]	Boltzmann (Maxwells equations) [7, p. 319]	Developed
			Truncated D.F. (Undeveloped)	Undeveloped

Table 1: (Continued)

Particle			System Model	
Structure	Species	Interaction [Mechanics of Interaction]	Model equation	Macroscopic description: present status
1.4 Invariant (No change in molecular, atomic, nuclear structure)	Mixture (Electrically charged) ions, electrons, nuclear particles	Above field and many-particle (one particle interacts with many others)	Fokker-Planck Vlassov. See Sect. 4.5	Initial development
			Multi-trunc. D.F. Undeveloped	
1.5 Variant (Changes in molecular, atomic, nuclear configuration or structure)	Single and Mixture (Neutral: as above)	Inelastic binary collision. Excitation of internal modes [Classical and quantum]	Wang-Chang and Uhlenbeck (Based on Boltzmann) See Sect. 4.5	Largely Undeveloped
			Trunc. D.F. Undeveloped	
1.6 Variant	Mixture (Charged: as above)	Atomic and nuclear reactions with external electromagnetic field [Quantum]	Undeveloped in Boltzmann	Undeveloped
			Trunc. D.F. Undeveloped	Undeveloped
1.7 Invariant	Single and Mixture (Neutral: as above)	Elastic Binary Collision [Quantum]	Uehling and Uhlenbeck (Based on Boltzmann)	Developed

Table 2. Kinetic Theory Based on Quantum Formalism

Particle			System Model	
Structure	Species	Interaction [Quantum Mechanics]	Model equation	Macroscopic description: present status
2.1 Invariant	Single (Neutral)	Elastic Binary Collision	Ross and KIRKWOOD. Sect. 2.2 Truncated D.F. Sect. 2.4	Undeveloped
2.2 Invariant	Single (Neutral and charged)	Elastic Binary collision and many-particle interaction	Doubly-Truncated D.F. Chapter 3 (Basic formalism)	Undeveloped
2.3 Invariant	Mixture (Neutral and charged)	Elastic Binary collision and many-particle interaction	Doubly-Truncated D.F. Chapter 3 (Basic formalism) (Undeveloped)	Undeveloped
2.4 Variant	Mixture (Neutral and charged)	Inelastic: Atomic and Nuclear reactions, and electromagnetic fields	Multi-truncation D.F. — Basic Formalism of Chapter 3 and Discussion in Chapter 4 (Undeveloped)	Undeveloped

On the Renormalization of Beta Coupling*

By

K. Baumann and **A. Höld**

Institute for Theoretical Physics of the University, Vienna

(*Received December 23, 1959*)

Summary

The renormalization of the vector and axial vector current is calculated for a single DIRAC field which is coupled to itself. A nonlocal FERMI-type interaction is introduced which has been treated by ABRIKOSOV et al. In the limit of small nonlocality the renormalization can be performed nonperturbationally. We find vector nonrenormalization and an axial vector renormalization factor greater than one for the following types of self-interaction: (a) tensor coupling, (b) axial vector coupling, negative coupling constant, (c) scalar and pseudoscalar coupling, positive coupling constant.

Let us consider the following model of strong interactions, which has been treated by ABRIKOSOV et al. [1]: There is one single nucleon field $\psi(x)$ interacting with itself, the interaction HAMILTONIAN being defined by

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(t)\, dt = \tag{1}$$

$$= 2\pi^2 l^2 \int \bar{\psi}(x)\, \psi(x')\, \bar{\psi}(y)\, \psi(y')\, F\,(x - x', x - y, y - y')\, dx\, dx'\, dy\, dy'$$

The form factor $F\ (\xi, \eta, \zeta)$ is supposed to vanish for $\xi^2 > l^2$, $\zeta^2 > l^2$, or $\eta^2 > L^2$. In momentum space, this means that the interaction between two nucleons vanishes if one of the nucleon momenta exceeds l^{-1}, or if the momentum transfer between the nucleons exceeds L^{-1}. It has been shown in ref. [1] that the nucleon-nucleon vertex and the nucleon GREEN function can be worked out for $l \ll L$, and L sufficiently small as compared with the wave lengths involved. In the limit $L = 0$, $l/L = 0$ the vertex operator approaches zero, and the GREEN function becomes $(-i\gamma p - m)^{-1}$.

We shall use this model to get a nonperturbational expression for the renormalized vector and axial vector current neglecting contribu-

* Partly supported by the United States Government.

tions small compared with $l^2 L^2$. We start from the exact expression for the axial vector vertex:

$$-i(2\pi)^4 \Gamma_\lambda^{(A)}(p,p) = -i(2\pi)^4 \beta\gamma_\lambda\gamma_5 + \\ + \int^{1/L} d^4k\, \beta\, 4\pi^2\, \Gamma(p, p-k, k)\, G(p-k)\, \gamma_\lambda\gamma_5\, G(p-k) \tag{2}$$

Here $G(p)$ is the one particle Green's function,

$$G(p) = \beta(-i\gamma p - m)^{-1} \tag{3}$$

$\Gamma(p, q, k)$ is the four fermion vertex operator.

In accord with Abrikosov et al., let us replace $\Gamma(p, q, k)$ by $\Gamma_1(k)$ which, together with $G(p)$ is defined by the equations

$$\Gamma_1(p) = l^2\left[1 + i\, l^2 \int^{1/l} Sp\,(G(q-p)\, G(p))\, d^4q\right]^{-1} \tag{4}$$

$$\left[-i\gamma p - m - \int^{1/L} 4\pi^2\, \Gamma_1(q)\, G(p-q)\, d^4q\right] G(p) = 1 \tag{5}$$

One can convince oneself that the graphs dropped by using Γ_1 instead of Γ yield contributions which can be neglected in our approximation. It should be noted that (5) does not coincide with the corresponding equation of ref. [1]. Eq. (5) is essential for getting nonrenormalization of the vector current, which should be guaranteed for the model considered [2].

In the approximation we use (4) and (5) are solved by

$$\Gamma_1(p) = \frac{1}{2} l^2 \tag{6}$$

$$G(p) = (1 + (l/4L)^2)\,(-i\gamma p - m)^{-1} \tag{7}$$

Putting this into (2), we get $-i(2\pi)^4 (1 - (l/4L)^2)\,\gamma_\lambda\gamma_5$ for the first r. h. s. term and $-i\pi^4 (l/L)^2\,\gamma_\lambda\gamma_5$ for the second term. Thus we have

$$\Gamma_\lambda^{(A)}(p,p) = (1 + l^2/8L^2)\,\gamma_\lambda\gamma_5 \tag{8}$$

Dropping the γ_5 factors in (2) leads to a change in sign in the evaluation of the second term of the r. h. s. Therefore

$$\Gamma_\lambda^{(V)}(p,p) = \gamma_\lambda \tag{9}$$

Summarizing we can say that our model shows as well vector nonrenormalization as an axial vector renormalization factor greater than one. The model is certainly unrealistic in that it does not lead to nucleon antinucleon bound states to be interpreted as mesons [3]. Because of the simple expression (6) for Γ_1 the axial vector renormalization factor is practically the result of a perturbation-like calculation. But of course it corresponds to an infinite number of graphs whose contribution is of the same order as the lowest order perturbation contribution [4]. So we cannot, e. g., produce a renormalization factor $1 - l^2/8L^2$ instead of $1 + l^2/8L^2$ by simply replacing l^2 by $-l^2$ in (1).

We have done similar calculations for a number of couplings, which will be published in detail later. Here we summarize the main results:

Putting

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(t)\, dt = \tag{1'}$$

$$= 2\pi g_0 \int \bar{\psi}(x)\, O_j\, \psi(x')\, \bar{\psi}(y)\, O_j\, \psi(y')\, F(x-x', x-y, y-y')\, dx\, dx'\, dy\, dy'$$

we get an axial vector renormalization factor greater than one for

$$g_0 = l^2, \qquad O_j = 1, \quad \gamma_5;$$
$$g_0 = -2\, l^2, \qquad O_j = \gamma_\lambda \gamma_5;$$
$$g_0 = \pm 3\, m^{-2} (\log l^2/L^2)^{-1}, \qquad O_j = \sigma_{\mu\nu};$$

on the other hand we get a factor smaller than one for

$$g_0 = -l^2, \qquad O_j = 1, \quad \gamma_5;$$
$$g_0 = \pm m^{-2} (\log l^2/L^2)^{-1}, \qquad O_j = \gamma_\lambda;$$
$$g_0 = 2\, l^2, \qquad O_j = \gamma_\lambda \gamma_5.$$

References

1. A. A. Abrikosov et al., Phys. Rev. **111**, 321 (1958).
2. L. B. Okun, 1958 Ann. Int. Conf. on High Energy Physics at CERN, p. 223.
3. E. Fermi and C. N. Yang, Phys. Rev. **76**, 1739 (1948).
4. A lowest order perturbation calculation with a strong Fermi-type interaction has recently been done by C. Iso, Progress Theor. Phys. **22**, 62 (1959).

Über die Aufspaltung der Energieeigenwerte in einem Kristall und die Berechnung der Bindungsenergie

Von

Roman Sexl

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 3 Abbildungen

(*Eingegangen am 15. Februar 1960*)

Zusammenfassung

Für ein durch δ-Funktionen spezialisiertes Kronig-Penney Modell eines Kristalles wird unter der Voraussetzung $\exp(-\varkappa a) \ll 1$ die Aufspaltung des Eigenwertes für ein beliebiges N explizit angegeben und die Bindungsenergie berechnet.

1. Einleitung

Für das Auftreten von Energiebändern in einem Kristall kann man folgende anschauliche Deutung geben:

Jeder Eigenwert einer einzelnen Potentialmulde, die das Feld des Kernes angibt, spaltet bei Annäherung von N solchen Mulden in N getrennte Eigenwerte auf, die in der Grenze für $N \to \infty$ in ein Energieband übergehen. Wir wollen das an einem Beispiel zeigen und wählen dafür folgende möglichst einfache Voraussetzungen:

a) Der Kristall sei eindimensional.

b) Das Potential eines Kernes sei $V = -C \cdot \delta(x)$ ($\delta(x)$ Diracsche Deltafunktion).

c) Die Wechselwirkung der Elektronen werde vernachlässigt (Behandlung als Einteilchenproblem).

d) Die Aufspaltung sei nur schwach. Eine strenge Formulierung dafür wird weiter unten gegeben.

Dieses Modell ist eine Spezialisierung des Kronig-Penney Kristalles[1].

[1] R. de L. Kronig und W. G. Penney, Proc. roy. Soc. **A 130**, 499, 1931; bezüglich neuerer Literatur vergleiche A. Haug und A. Schönhofer, Zs. f. Phys. **148**, 513, 1957.

2. Auflösung der Schrödingergleichung

Wir wollen nun die ungestörten Eigenwerte berechnen, das heißt die eines einzelnen Atomes. Die Schrödingergleichung lautet in diesem Fall:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + C\,\delta(x)\cdot\Psi(x) = B_0\,\Psi(x) \qquad B_0 = -E \tag{1}$$

Für $x \neq 0$ haben wir die Gleichung eines freien Teilchens, die Lösung ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A\cdot e^{-\varkappa_0 x} \qquad x>0 \\ \Psi(x) &= F\cdot e^{+\varkappa_0 x} \qquad x<0 \end{aligned} \qquad \varkappa_0 = \sqrt{\frac{2mB_0}{\hbar^2}} \tag{2}$$

Wegen der Stetigkeit von Ψ im Ursprung muß $A = F$ gelten. Weiter erhalten wir durch Integration der Gleichung (1) von $x = -\varepsilon$ bis $x = +\varepsilon$ im Limes $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d\Psi}{dx}\Big|_{-0}^{+0} + C\cdot\Psi(0) = 0 \tag{3}$$

Der Beitrag der rechten Seite verschwindet wegen der Stetigkeit von Ψ. Setzt man die Wellenfunktion (2) in (3) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von $A = F$

$$\varkappa_0 = \frac{C\cdot m}{\hbar^2} \qquad B_0 = \frac{C^2 m}{2\hbar^2} \tag{4}$$

Es existiert also nur ein gebundener Zustand.

Analog gehen wir für N Atome vor. Diese sollen sich in Abständen a auf der x-Achse befinden, so daß das Potential den in Abb. 1 gezeigten Verlauf hat.

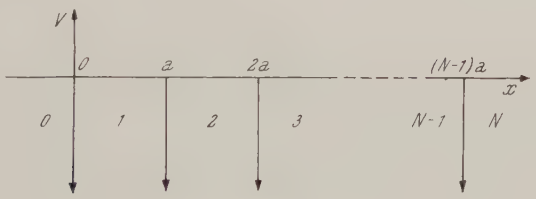

Abb. 1

Die Schrödingergleichung lautet jetzt

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + C\cdot\Psi(x)\sum_{n=0}^{N-1}\delta(x-na) = B\cdot\Psi(x) \qquad B = -E \tag{5}$$

Durch die δ-Funktionen wird die x-Achse in $N+1$ Abschnitte geteilt, die wir in Abb. 1 mit $0, 1, \ldots N$ bezeichnet haben. Auf jedem dieser

Stücke ist die Wellenfunktion die eines freien Teilchens, wir bezeichnen sie mit $\Psi_r\,(r = 0, 1, \ldots, N)$

$$\Psi_r = A_r \cdot e^{\varkappa x} + F_r \cdot e^{-\varkappa x} \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{2\,m\,B}{\hbar^2}} \tag{6}$$

Da die Wellenfunktion im Unendlichen verschwinden muß erhalten wir zunächst

$$F_0 = A_N = 0$$

Die Stetigkeit in den Punkten $x = na$ liefert

$$A_n \cdot e^{n\varkappa a} + F_n \cdot e^{-n\varkappa a} = A_{n+1} \cdot e^{n\varkappa a} + F_{n+1} \cdot e^{-n\varkappa a} \tag{7}$$

Die Integration der SCHRÖDINGERgleichung von $x = na - \varepsilon$ bis $x = na + \varepsilon$ ergibt für $\varepsilon \to 0$

$$\varkappa(A_{n+1} \cdot e^{n\varkappa a} - F_{n+1} \cdot e^{-n\varkappa a} - A_n \cdot e^{n\varkappa a} + F_n \cdot e^{-n\varkappa a}) +$$

$$+ \frac{2\,m\,C}{\hbar^2}\,(A_n \cdot e^{n\varkappa a} + F_n \cdot e^{-n\varkappa a}) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{8}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion lassen sich die Gleichungen (7) und (8) zu zwei neuen Gleichungssystemen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} &A_n(1-x) + x\,A_{n+1} + B_n \cdot e^{-2a\varkappa n} = 0 \\ &A_n \cdot e^{2a\varkappa n} + B_n(1+x) - x \cdot B_{n+1} = 0 \\ &n = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad A_N = F_0 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Dabei ist

$$x = \frac{\varkappa\hbar^2}{m\,C} = \frac{\varkappa}{\varkappa_0}$$

Damit das System nichttrivial lösbar ist, muß die Gleichungsdeterminante $D(N)$ verschwinden

$$D(N) = 0 = \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & 0 & \ldots & & & \\ 1 & 0 & -x & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1-x & e^{-2\varkappa a} & x & 0 & & & & \\ 0 & e^{2\varkappa a} & 1+x & 0 & -x & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & e^{-4\varkappa a} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & e^{4\varkappa a} & 1+x & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1-x & e^{-2(N-2)\varkappa a} & x & 0 & 0 \\ & & & & & & e^{2(N-2)\varkappa a} & 1+x & 0 & -x & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1-x & e^{-2(N-1)\varkappa a} & 0 \\ & & & & & \ldots & 0 & 0 & e^{2(N-1)\varkappa a} & 1+x & x \end{vmatrix}$$

Wenn wir $D(N)$ nach dem Laplaceschen Satz nach den letzten beiden Spalten entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned} D(n) &= -x\cdot[e^{-2a(n-1)\varkappa}\cdot P(n-1)-(1-x)\cdot D(n-1)] \\ P(n) &= x\cdot[e^{2a(n-1)\varkappa}\cdot D(n-1)-(1+x)\cdot P(n-1)] \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei entsteht die Größe $P(n)$ aus $D(n+1)$ durch Streichen der letzten beiden Zeilen und Spalten, n durchläuft in diesen Rekursionsformeln die Werte $n=2,3,\ldots,N$. Die ersten $D(n)$ bzw. $P(n)$ sind

$$\begin{aligned} D(1) &= -x\cdot(1-x) & D(2) &= -x^2[(1-x)^2-e^{-2a\varkappa}] \\ P(1) &= -x, & P(2) &= -x^2[e^{2a\varkappa}(1-x)-1-x] \end{aligned} \tag{12}$$

3. Näherungsweise Lösung der Gleichungen

Diese transzendenten Gleichungen können natürlich nur näherungsweise gelöst werden. Wir machen die Voraussetzung, daß die Größe

$$k=e^{-\varkappa a}\ll 1$$

ist. Das bedeutet physikalisch, daß die Potentialmulden tief sind und außerdem weit voneinander entfernt, sich also gegenseitig nur wenig beeinflussen. Der Eigenwert spaltet dann nur schwach auf, die Größe x^2, die ja das Verhältnis von gestörtem zu ungestörtem Eigenwert ist, unterscheidet sich nur wenig von 1. Es ist dann größenordnungsmäßig

$$x\cong 1, \qquad 1-x\cong k$$

Wie man leicht sieht, enthält der zweite Term in $P(n)$ eine Potenz von k mehr und ist daher zu streichen. Weiter können wir in den e-Potenzen in unserer Näherung $\varkappa$ durch $\varkappa_0$ ersetzen, wir bekommen dann unter gleichzeitiger Zusammenfassung der beiden Formeln (11):

$$D(n)=x\cdot(1-x)\cdot D(n-1)-x^2k^2D(n-2) \tag{13}$$

Für die ersten Determinanten ergibt sich

$$D(1)=-x(1-x) \qquad D(2)=-x^2[(1-x)^2-k^2]$$

Daraus können wir folgende Dinge entnehmen:

$D(n)$ enthält den physikalisch unwichtigen Faktor $-x^n$, den wir im Folgenden weglassen werden, da wir wegen $x\cong 1$ keine neuen Nullstellen von $D(n)$ daraus erhalten.

$D(n)$ ist dann nur mehr eine Funktion von $1-x=(\varkappa_0-\varkappa)/\varkappa_0$, der relativen Aufspaltung. Wenn wir daher eine neue Unbekannte

$$z=(1-x)/k=\frac{\varkappa_0-\varkappa}{\varkappa_0\cdot k}$$

einführen, erhalten wir eine besonders einfache Form der Rekursionsformeln (wobei in $D(n)$ jeweils noch der irrelevante Faktor k^n weggelassen ist).

$$\begin{aligned} D(n) &= z\cdot D(n-1)-D(n-2) \\ D(1) &= z, \qquad D(2)=z^2-1 \end{aligned} \tag{14}$$

z gibt also die Aufspaltung von $\varkappa$ in Einheiten von $\varkappa_0 k$ an. Um auf einen Schlag alle Gleichungen $D(N) = 0$ zu lösen, setzen wir

$$z = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$$

Für die Determinanten bekommen wir dann der Reihe nach

$$D(1) = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$$

$$D(2) = e^{2i\varphi} + 1 + e^{-2i\varphi}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D(N) = e^{Ni\varphi} + e^{(N-2)i\varphi} + \ldots + e^{-(N-2)i\varphi} + e^{-Ni\varphi}$$

Der Beweis ist leicht mittels vollständiger Induktion durchführbar. Daher führt die Eigenwertgleichung für N Atome $D(N) = 0$ auf

$$(e^{2i\varphi})^N + (e^{2i\varphi})^{N-1} + \ldots + e^{2i\varphi} + 1 = 0$$

Das ist aber die Kreisteilungsgleichung, sie hat bekanntlich die Lösungen

$$\varphi = \frac{r\pi}{N+1} \qquad r = 1, 2, \ldots, N \tag{15}$$

oder, wenn wir wieder zu unserer ursprünglichen Unbekannten übergehen

$$z_r = 2 \cdot \cos\frac{r\pi}{N+1} \qquad r = 1, 2, \ldots, N \tag{16}$$

Für die Aufspaltung der Energieeigenwerte erhalten wir daher

$$E_r = -\varkappa^2 B_0 = -B_0(1 - k \cdot z_r)^2 = -B_0(1 - 2k z_r) \tag{17}$$

Die Aufspaltung ist in Abb. 2 aufgetragen.

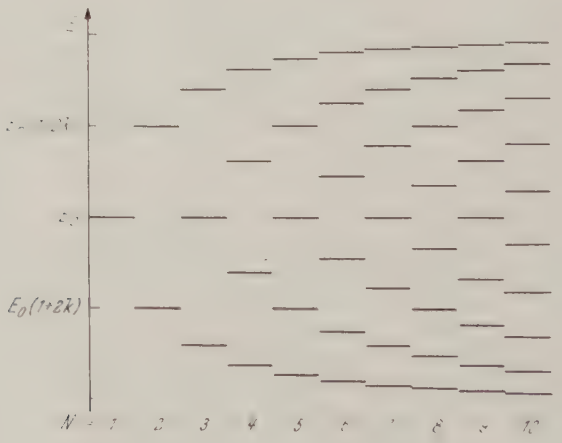

Abb. 2

4. Berechnung der Bindungsenergie

Wir haben bisher gesehen, daß die Energieeigenwerte in unserem Kristall symmetrisch um den Eigenwert eines einzelnen Atomes liegen.

Wie weit sind diese Niveaus mit Elektronen besetzt? Wegen der Gültigkeit des PAULI-Verbots kann jedes Niveau nur von zwei Elektronen und zwar mit entgegengesetzt gerichtetem Spin besetzt werden. Es wird daher die untere Hälfte des Bandes mit Elektronen gefüllt sein, während die obere vollständig leer ist. Wenn die einzelnen Atome zuerst unendlich weit voneinander entfernt waren, sich also gegenseitig nicht beeinflußten, und dann einander genähert werden, so werden die Elektronen vom Energiewerte E_0 in die untere Bandhälfte herunterrutschen, es wird also Energie frei. Unsere Aufgabe ist es, diese Bindungsenergie zu berechnen. Sie ist offenbar gleich

$$\begin{aligned} K &= N \cdot E_0 - 2(E_N + E_{N-1} + \ldots + E_{(N+2)/2}) \text{ für gerade } N \\ K &= N \cdot E_0 - 2(E_N + E_{N-1} + \ldots + E_{(N+3)/2}) - E_0 \text{ ungerade } N \end{aligned} \tag{18}$$

Setzt man die E_r aus Formel (17) ein, so erhält man mit Hilfe der Gleichung

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\cos\dfrac{n\varphi}{2} \cdot \sin\dfrac{n+1}{2}\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

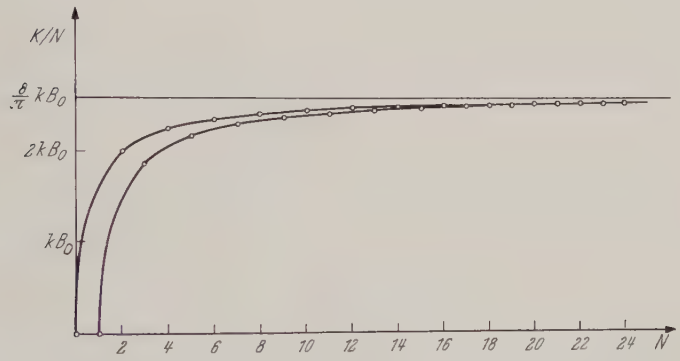

Abb. 3

für die Bindungsenergie

$$K = 8 \cdot k \cdot B_0 \cdot \begin{cases} \left(\dfrac{\cos^2 \dfrac{\pi N}{4(N+1)}}{\sin \dfrac{\pi}{2(N+1)}} - 1 \right) & \text{gerade } N \\ \left(\dfrac{\sin \dfrac{\pi(N+3)}{4(N+1)}}{\sqrt{2} \sin \dfrac{\pi}{2(N+1)}} - 1 \right) & \text{ungerade } N \end{cases} \tag{19}$$

für sehr große N gehen beide Werte über in

$$K = -\frac{8}{\pi} k \cdot B_0 = \frac{4 N m C^2}{\pi \hbar^2} \cdot e^{-\frac{m C a}{\hbar^2}}$$

Den Verlauf der Bindungsenergie mit wachsendem N zeigt Abb. 3, wobei allerdings K/N, also die Kohäsionsenergie pro Atom aufgetragen ist.

Herrn Prof. Dr. W. Thirring danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

Der Einfluß von Fehlstellen auf den chemischen Abbau von nachleuchtendem Kalzit

Von

Ingrid Hanke

Physikalisches Institut der Universität Graz

Mit 10 Abbildungen

(*Eingegangen am 29. Februar 1960*)

Zusammenfassung

An Hand von Mikrophotographien wird gezeigt, daß an nachleuchtendem Kalkspat beim Einwirken von Essigsäurelösungen geringer Konzentration drei Ätzgrubentypen mit rhombischer Basis nachgewiesen werden können, die sich in charakteristischer Weise über die Rhomboederspaltflächen verteilen. Die Dichte geringer Gitterstörungen beträgt im Mittel $5{,}6 \cdot 10^6/\mathrm{cm}^2$, ist also doppelt so groß wie an gewöhnlichem Kalzit. Die Dichte gröberer Gitterstörungen liegt zwischen 10^3 und $2 \cdot 10^5/\mathrm{cm}^2$. Für die Materialablösung in Form von Pyramiden ergibt sich innerhalb kurzer Ätzzeiten eine Proportionalität mit der dritten Potenz der Ätzdauer. Mit Hilfe der Treppenstruktur an den Ätzgrubenwänden werden die Abstände der Fehlbauschichten und die Abmessungen der Idealbaublöcke interferometrisch ermittelt.

Einleitung

Die Ätzmethode stellt ein sehr empfindliches Nachweisverfahren zur Ermittlung von Störstellen dar, da gestörte Kristallbereiche schneller abgelöst werden als ungestörte Gitterblöcke. Je nach der Lage der Störstellen treten verschiedene Abbauformen auf. Sogenannte „Ätzgruben" entstehen dann, wenn die Fehlstelle in Richtung der Flächennormalen eine höhere Ablösungsgeschwindigkeit bewirkt als tangential zur Spaltfläche. Die Form dieser Ätzgruben hängt von der Art und Dauer der Ätzung, von der Beschaffenheit des Lösungsmittels [1] und nach neueren Untersuchungen auch von der speziellen Art der Fehlstelle ab [2].

In früheren Arbeiten wurde der Abbaumechanismus unverformter und verformter Kalzitspaltflächen beschrieben, wie er beim Einwirken von stark verdünnten Essigsäurelösungen an gewöhnlichem, durchsichtigem Kalkspat abläuft. Es war dabei möglich im Anfangsstadium der Abtragung eine Gesetzmäßigkeit für die Materialablösung anzugeben

und die Störstellenflächendichte zu bestimmen [3]. Geringe Störungen, die zur Ausbildung flacher Ätzgruben mit Boden führten, traten an allen Spaltflächen mit einer Dichte von $2{,}5 \cdot 10^6$ cm^2 auf, während umfangreichere Gitterstörungen eine mittlere Dichte von $1{,}5 \cdot 10^4$ cm^2 aufwiesen. In derselben Weise wurde nun auch ein nachleuchtendes Kristallmaterial untersucht, das einen deutlich ausgeprägten chemischen Realbau besitzt. Da die feinen Realbaustrukturen nur bei sehr geringen Konzentrationen erschlossen werden können, sollen nur die Ergebnisse behandelt werden, die sich beim Ätzen mit einer 0,02%-igen Essigsäurelösung ergeben.

Experimentelle Verfahren

Die chemischen und optischen Methoden wurden bereits in einer früheren Arbeit beschrieben [3]. Die Konzentration des Lösungsmittels wurde zwischen 0,1 und 0,02 Gewichtsprozente variiert, die Proben im Lösungsmittel rasch bewegt und nach je 10 Sekunden Ätzangriff in destilliertem Wasser gründlich gespült, um einen regelmäßigen Angriff zu gewährleisten.

Als Versuchsmaterial dienten vollkommen frische Rhomboederspaltflächen eines nachleuchtenden Kalzitkristalls[1]. Die Beobachtung der Oberflächenveränderungen erfolgte in Interferenz, Phasenkontrast und Schräglicht.

Ätzgrubentypen, -verteilung und -dichte

Nach dem Ätzangriff lassen sich auf den Spaltflächen des nachleuchtenden Kristalls drei verschiedene Typen von Ätzgruben mit rhombischer Basis registrieren, deren Form von der Konzentration des Lösungsmittels bestimmt wird. Bei Verwendung von Konzentrationen zwischen 0,1 und 0,02 Gewichtsprozente sind es tiefe Pyramiden, tiefe und seichte Pyramidenstümpfe (Abb. 1). Ihre Häufigkeit ist auf verschiedenen Flächen erheblichen Schwankungen unterworfen. Das Auftreten der drei verschiedenen Ätzgrubensorten muß, wie an gewöhnlichem Kalzit, auf die Existenz dreier verschiedener Störstellentypen mit unterschiedlichem Wirkungsbereich zurückzuführen sein. Ein wesentlicher Unterschied gegenüber gewöhnlichen durchsichtigen Kalkspatkristallen besteht darin, daß die Mehrzahl aller hier auftretenden Ätzmerkmale asymmetrisch gebaut ist, das heißt daß die Projektion der Pyramidenspitze in die Ätzgrubenbasisfläche nicht auf die kürzere Rhombendiagonale zu liegen kommt (Abb. 2), wodurch die Flächensymmetrie verloren geht. Da der Ätzvorgang für die Abweichung von der Kristallsymmetrie nicht verantwortlich ist [1], muß zur Erklärung eine asymmetrische Lage der Gitterstörung bzw. der unterschiedliche Abbau an „edge und screw dislocations" in Betracht gezogen werden [2].

[1] Dieser Kristall, der aus Niederrabenstein i. S. stammt, wurde uns von Herrn Prof. Dr. Karl Przibram freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

Hinsichtlich des Einflusses der Konzentration der Essigsäurelösung auf die Beschaffenheit der Ätzgrubenwände besteht eine vollkommene Parallelität mit den Erscheinungen an gewöhnlichem Doppelspat. Bei Konzentrationen zwischen 0,1% und 0,05% sind die Ätzgrubenseitenwände bei lichtoptischer Beobachtung relativ glatt, während bei Konzentrationen unter 0,05% eine deutliche Treppenstruktur auftritt (Abb. 3).

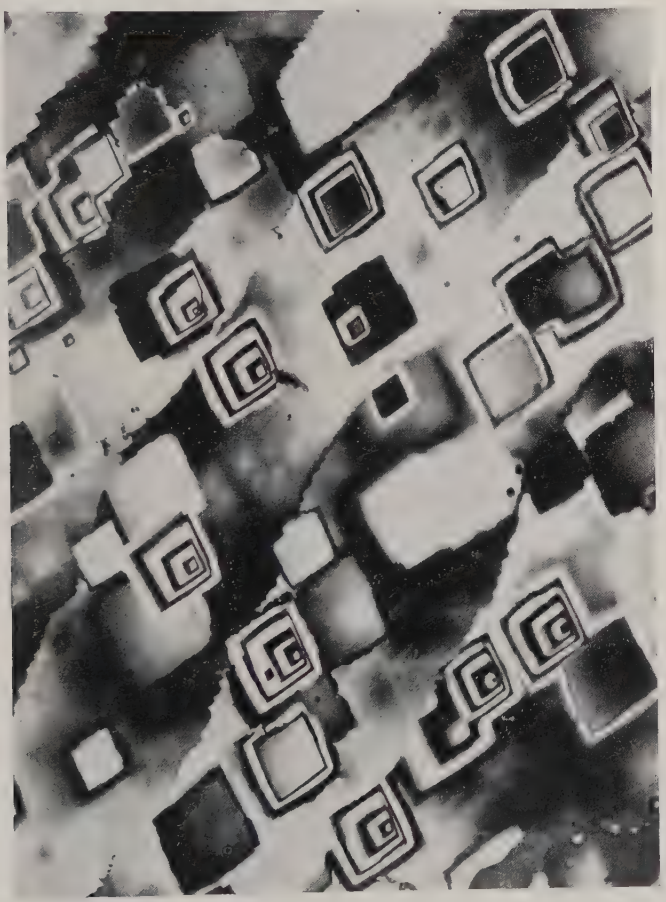

Abb. 1. Ätzpyramiden und Ätzpyramidenstümpfe auf nachleuchtendem Kalzit bei einer Ätzzeit von 120 sek. Interferogramm, $\lambda = 546$ mμ, Vergr. 1100 : 1

Die Anordnung der drei verschiedenen Ätzgrubensorten und damit ätzempfindlichen Störstellentypen wird durch drei Merkmale gekennzeichnet:

1. Willkürliche Verteilung von Fehlstellen, die extrem dicht gepackt liegen, aber einen sehr kleinen Gitterbereich erfassen (Abb. 4).

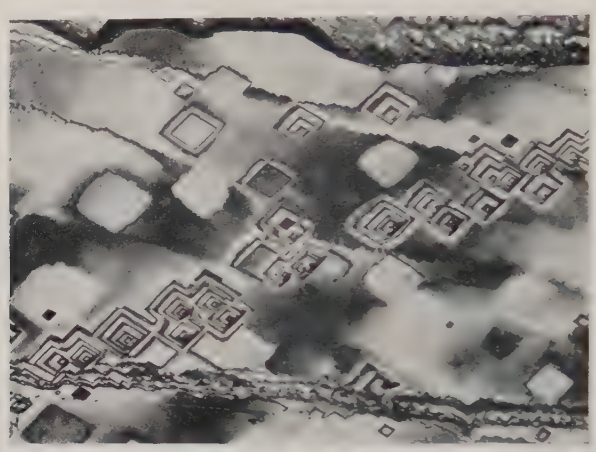

Abb. 2. Asymmetrische Ätzfiguren auf nachleuchtendem Kalzit. Ätzdauer: 120 sek, 0,02%-ige CH_3COOH, Interferogramm, $\lambda = 546$ mμ, Vergr. 900 : 1

2. Verteilung von Fehlstellen in größeren Abständen, die einen ausgedehnten Wirkungsbereich haben (Abb. 1).

Abb. 3. Treppenstruktur an den Ätzgrubenwänden. Probe wurde 80 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung, Vergr. 1500 : 1

3. Anordnung in Form von geraden Ketten, die parallel zu den Rhomboederkanten verlaufen und sich aus allen drei vorhandenen Ätzgrubentypen zusammensetzen (Abb. 5 und 6).

Die Dichte der verschiedenen Störstellensorten läßt sich durch Auszählen der Ätzgruben ermitteln. Durch Auswertung vieler verschiedener Flächengebiete ergeben sich die in Tab. 1 angegebenen Mittelwerte.

Tabelle 1. Dichte ätzempfindlicher Störstellen auf nachleuchtendem Kalzit

Ätzgrubentype	Ätzgrubendichte (Anzahl/cm²)	
	Mittelwert	Streuung
Seichte Stümpfe	$5{,}6 \cdot 10^6$	$4{,}2 \cdot 10^6$ bis $5{,}7 \cdot 10^6$
Tiefe Pyramiden	$7{,}5 \cdot 10^4$	$1{,}0 \cdot 10^3$ bis $2{,}0 \cdot 10^5$
Tiefe Stümpfe	$6{,}0 \cdot 10^4$	$1{,}0 \cdot 10^3$ bis $1{,}5 \cdot 10^5$

Ein Vergleich zwischen den in Tab. 1 angegebenen Dichtewerten der verschiedenen ätzempfindlichen Störstellen zeigt, daß auch beim nachleuchtenden Kalkspat die Dichte der Fehlstellen, die grobe Gitterveränderungen hervorrufen und daher bei kurzen Ätzzeiten zu einem Abbau in Form von tiefen Pyramiden oder Pyramidenstümpfen führen,

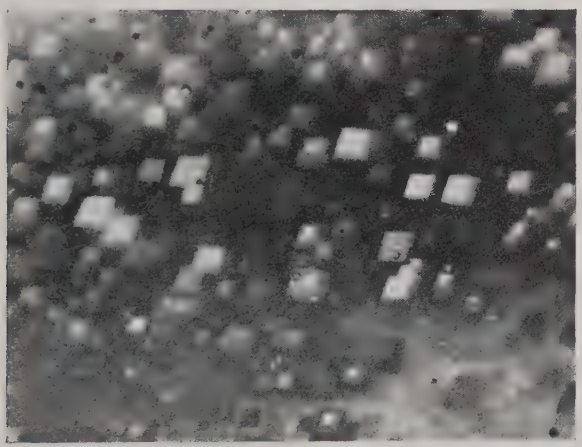

Abb. 4. Seichte Ätzgruben in dichter Packung auf nachleuchtendem Kalzit. Ätzdauer: 20 sek, Interferogramm, $\lambda = 546\ m\mu$, Vergr. 1100 : 1

zirka 100mal kleiner ist als die der Fehlstellen, die zur Ausbildung seichter Ätzgruben Anlaß geben, deren Boden bereits mit der ersten widerstandsfähigen Schichte übereinstimmt. Letztere Ätzmerkmale sind über die gesamte Spaltfläche gleichmäßig verteilt, so daß die Streuungen um den Mittelwert innerhalb sehr enger Grenzen liegen. Man kann daraus schließen, daß Gitterstörungen, die eine erhebliche Tiefenausdehnung

besitzen, wesentlich seltener sind als solche, die die Abtragung maximal bis zur ersten störstellenarmen Schichte unter der Spaltfläche begünstigen.

Abb. 5. Ätzgrubenkette parallel zu einer Rhomboederkante ausgerichtet. Ätzdauer: 5 sek; negativer Phasenkontrast, Vergr. 1400 : 1

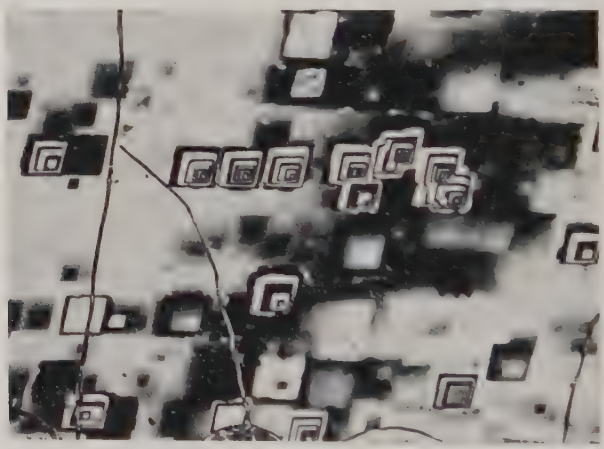

Abb. 6. Geradlinige Anordnung von Ätzpyramiden auf Rhomboederspaltflächen von nachleuchtendem Kalzit. Ätzzeit: 80 sek. Interferogramm, $\lambda = 546$ mμ, Vergr. 800 : 1

Stellt man die in Tab. 1 angegebenen Werte der Ätzgrubendichten denen gegenüber, die für das gewöhnliche Kristallmaterial ermittelt wurden, so ergibt sich, daß alle Ätzgrubentypen pro Flächeneinheit mindestens doppelt so oft vertreten sind. Da die Güte eines Kristalls

von der Anzahl und Beschaffenheit der in ihm enthaltenen Störstellen abhängt, kann man sagen, daß der nachleuchtende Kristall dem Idealkristallbau ferner steht als der gewöhnliche. Dies äußert sich auch, wie später gezeigt wird, im Abstand benachbarter störstellenfreier Schichten bzw. in den Abmessungen der Idealbaubereiche.

Für die Entstehung der drei verschiedenen Ätzgrubensorten und ihr Verhalten bei Änderung der Ätzzeit trifft dasselbe zu wie für die Ätzgruben am gewöhnlichen Kristallmaterial [3].

Ätzgrubengeometrie und Schichtbildung

Im Gegensatz zu den an gewöhnlichen Kalkspatkristallen auftretenden Ätzgruben einer Type, die bei gegebener Ätzdauer und Konzentration dieselben charakteristischen Abmessungen haben, zeigen sich

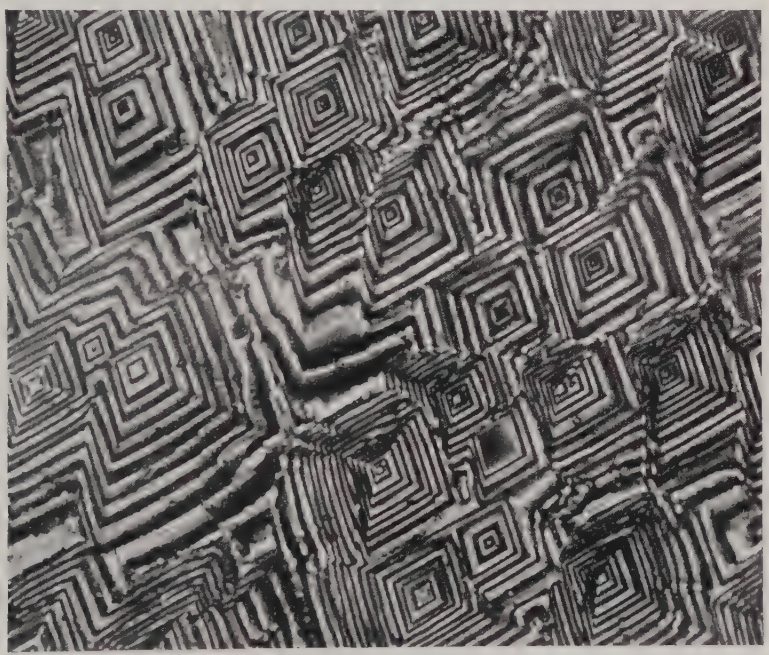

Abb. 7. Ätzgruben verschiedener Größe auf nachleuchtendem Kalzit nach einer Ätzdauer von 600 sek. Interferogramm, $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$, Vergr. 800 : 1

an den äquivalenten Ätzgruben auf den Spaltflächen des nachleuchtenden Kalzits erhebliche Differenzen in den Abmessungen (Abb. 7). Daher kann eine gesetzmäßige Erfassung des Abbaues und eine einheitliche geometrische Form nur in sehr grober Näherung angegeben werden.

Die zur Beschreibung der Ätzgrubenform erforderlichen Größen, Pyramidentiefe H, mittlere Neigungswinkel α und β der Ätzgrubenwände gegen die Spaltfläche, die Stufenbreiten b_p und b_r auf der Pol- und Randseite der Ätzgruben und die Stufenabstände s (vergl. in [3] Abb. 9 b), lassen sich mikrointerferometrisch ermitteln. Es ergeben sich dabei merkliche Abweichungen in der Größe der Stufenhöhen und Stufenbreiten von den für gewöhnlichen Kalzit gefundenen Werten [3], wie der nachstehenden Tab. 2 zu entnehmen ist.

Tabelle 2. Stufenbreiten und Stufenhöhen in Abhängigkeit von der Ätzdauer. Konzentration: 0,02%

Ätzzeit (sek)	Stufenbreite auf der Polseite b_p	Stufenbreite auf der Randseite b_r	Stufenhöhen	
	Mittelwert (μ)	Mittelwert (μ)	Mittelwert (Å)	Streuung (Å)
40	1,0	0,7	460	390 bis 630
60	1,1	0,8	480	300 bis 600
80	1,0	0,6	490	350 bis 700
100	1,1	0,7	420	350 bis 650
120	1,3	0,8	480	300 bis 700
180	1,2	0,7	400	300 bis 650
240	1,1	0,6	490	300 bis 600
300	1,0	0,7	580	300 bis 800
600	1,4	0,9	450	300 bis 700

Ein Vergleich dieser an nachleuchtendem Kalzit gefundenen Stufenbreiten mit denen an gewöhnlichen Kalkspatkristallen zeigt [3], daß eine Abnahme um 30% bis 40% zu verzeichnen ist, was auf eine erhöhte Störung des Abbaues in tangentialer Richtung durch die Folge gestörter und ungestörter Gitterschichten schließen läßt.

Die Stufenhöhen s, die dem Abstand benachbarter störstellenfreier Gitterschichten entsprechen, weil der Abbau hier vorübergehend zum Stillstand kommt, sind von der Ätzzeit unabhängig. Der Mittelwert liegt mit 450 Å um zirka die Hälfte tiefer als an gewöhnlichen Kristallen (Abb. 8). Da für diese Kristalle dieselbe Theorie für die Ablagerung von Fehlschichten gilt, ist damit zu rechnen, daß wesentlich mehr Fremdbausteine bei der Kristallisation vorhanden waren. Die zum Einbau von Fehlschichten führende Übersättigung war bereits dann erreicht, wenn ideale Bereiche von der angegebenen Dicke auskristallisiert waren. Eine weitere Beeinflussung des Abstandes ungestörter Gitterschichten wird durch die Zahl der beim Wachsen entstehenden Lockerstellen hervorgerufen. Es ergeben sich für die Kantenlängen der Idealgitterbereiche des nachleuchtenden Kristallmaterials maximal 300 bis 700 Å.

Die Abnahme der Stufenbreiten und Stufenhöhen um zirka 40% führt dazu, daß die mittlere Neigung der Ätzgrubenwände gegen die Spaltfläche in derselben Größenordnung liegt. Bei kurzen Ätzzeiten

beträgt der Neigungswinkel der Pyramidenflächen auf der Seite der Polecke des Kristalls 4^0 bis 6^0, auf der der Randecke 8^0 bis 10^0. Eine erhebliche Abnahme der Neigungswinkel tritt bereits bei Ätzzeiten von 60 Sekunden aufwärts ein, weil die Zunahme der Pyramidentiefe nicht mehr linear mit der Ätzzeit erfolgt.

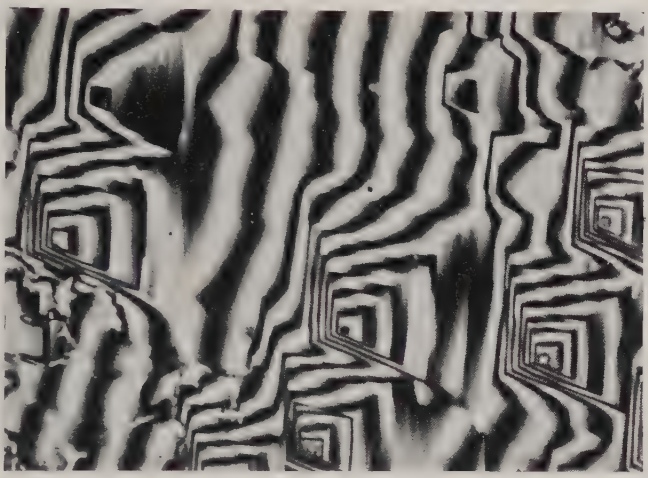

Abb. 8. Ätzgruben, die nach einer Ätzzeit von 240 sek auf einer Kalzitspaltfläche auftreten. Die Interferenzstreifen wurden normal zu einer Ätzgrubenbasiskante eingestellt. Vergr. 1100 : 1

Man kann sich ideal symmetrische Pyramiden aus einer diskreten Folge von Pyramidenstümpfen aufgebaut denken, deren Höhe dem Abstand benachbarter, störstellenfreier Schichten entspricht. Die Pyramidenstümpfe liegen beim nachleuchtenden Material wesentlich dichter als beim gewöhnlichen, weil die Abstände ungestörter Gitterschichten um 40% bis 50% kleiner sind.

Völlig analog ist auch die Beschaffenheit der Ätzpyramidenstümpfe. Ihre Tiefe wird durch den Wirkungsbereich von Störstellen bestimmt, deren Ausdehnung im Vergleich zu denen, die bei der gegebenen Ätzzeit noch einen pyramidenförmigen Abbau bewirken, wesentlich geringer sein muß. Für die extrem seichten Ätzgruben, deren Tiefe mit dem Abstand zweier benachbarter Schichten ungefähr gleichzusetzen ist, ist die Wirkung der Gitterstörung bereits an der ersten widerstandsfähigen Schichte parallel zur Spaltfläche beseitigt, weshalb sich dann nur mehr ein tangentialer Abbau in auflösbarem Ausmaße bemerkbar macht.

Das abgelöste Kristallvolumen als Funktion der Ätzzeit

Nähert man die Treppenstruktur der Ätzgrubenwände durch Ebenen an, so läßt sich das in Abhängigkeit von der Ätzzeit in Form von Ätz-

gruben abgetragene Volumen berechnen, wenn man die dazu erforderlichen Größen, Pyramidentiefe H, längere Rhombendiagonale D und kürzere Rhombendiagonale d mikrointerferometrisch ermittelt. Der dadurch bedingte Fehler in der Volumsberechnung ist kleiner als die Schwankungen der übrigen Größen um den Mittelwert.

Es ergibt sich, daß innerhalb kurzer Ätzzeiten ($t \leqslant 60$ sek) und bei konstanter Konzentration das pyramidenförmig abgelöste Volumen eine Proportionalität mit der dritten Potenz der Ätzdauer zeigt, weil D, d und H in guter Näherung linear mit der Ätzzeit zunehmen. Das abgetragene Volumen läßt sich als Funktion der Ätzdauer darstellen durch die Beziehung:

$$V(c, t) = K(c) \cdot t^3$$

Der Faktor K, der als Lösungsgeschwindigkeit definiert wurde [3], setzt sich aus den Mittelwerten der Geschwindigkeiten zusammen, mit denen sich D, d und H vergrößern. Da diese von der Konzentration abhängen, gilt:

$$K = \frac{v_D(c) \cdot v_d(c) \cdot v_H(c)}{6}$$

Bei einer Konzentration von 0,02% ergibt sich für K der Wert: $K = 1{,}17 \cdot 10^{-4}\,\mu^3\,\text{sek}^3$.

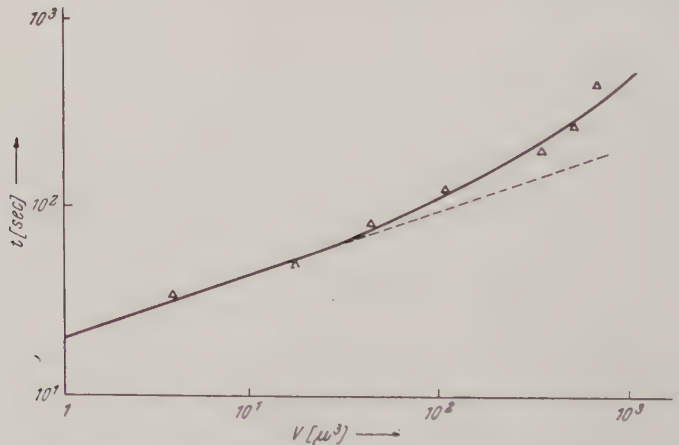

Abb. 9. In doppelt logarithmischem Maßstab wird das in Abhängigkeit von der Atzdauer abgetragene Volumen für eine Konzentration von 0,02% dargestellt

Damit ergibt sich für das in Abhängigkeit von der Ätzzeit abgetragene Volumen (Abb. 9)

$$V(t) \approx 1{,}17 \cdot 10^{-4} \cdot t^3 \qquad \text{für} \qquad t \leqslant 60\,\text{sek}, \quad c = 0{,}02\%$$

Bei höheren Ätzzeiten tritt eine Abweichung von dem Gesetz auf, da das abgelöste Volumen kleiner ist als für eine Proportionalität mit t^3 zu erwarten wäre. Dies wird durch eine Abnahme der linearen Lösungsgeschwindigkeiten v_d, v_D und v_H bedingt, wie sie aus Tab. 3 zu entnehmen ist.

Tabelle 3. Die linearen Lösungsgeschwindigkeiten v_d, v_D und v_H in Abhängigkeit von der Ätzzeit. Konzentration der Essigsäurelösung: 0,02%

Ätzdauer (sek)	v_D μ/sek	v_d μ/sek	v_H μ/sek	$v_H : v_D : v_d$
10 bis 60	0,27	0,20	0,013	1 : 20 : 15
80	0,22	0,16	0,014	1 : 16 : 12
120	0,23	0,17	0,009	1 : 26 : 18
240	0,19	0,14	0,008	1 : 21 : 17
600	0,13	0,09	0,005	1 : 26 : 19

Bis zu einer Ätzzeit von 60 sek sind bei konstanter Konzentration die Verhältnisse $D/t = v_D$, $d/t = v_d$ und $H/t = v_H$ annähernd konstant, während bei höheren Ätzzeiten eine Abnahme eintritt, so daß nach 600 sek Ätzdauer nur mehr zirka 50% der Anfangswerte festzustellen sind.

Die möglichen Ursachen für die Abnahme der Lösungsgeschwindigkeiten wurden bereits bei der Behandlung dieser Erscheinungen an gewöhnlichem Doppelspat diskutiert. Für die Verringerung von v_H, der Lösungsgeschwindigkeit in Richtung der Pyramidentiefe, die am stärksten zu verzeichnen ist, gibt es zwei Möglichkeiten. Sie kann einerseits darauf beruhen, daß das ursprüngliche Spaltflächenniveau abgetragen wird und daher die Bezugsfläche, für die v_H berechnet wurde, verlorengeht. Die Änderung des Bezugsniveaus macht sich umso eher bemerkbar, je dichter die Störstellen liegen, weil sich die Ätzgruben bereits nach kurzen Ätzabschnitten berühren (Abb. 4). Andererseits — und das ist wahrscheinlich die maßgebendere Ursache — ist die Gitterstörung begrenzt und daher nehmen v_D, v_d und v_H dann ab, wenn der Abbau in das Randgebiet der Gitterstörung vorgedrungen ist. Daher wird dann der Proportionalitätsfaktor K den für die Löslichkeit des idealen Gitters charakteristischen Wert annehmen, ebenso v_D, v_d und v_H. Daß die Abnahme von v_d und v_D geringer ist als die von v_H, läßt sich dadurch erklären, daß sich die Geschwindigkeiten in tangentialer Richtung aus dem durch die Gitterstörung hervorgerufenen Anteil und dem für die Abtragung idealer Gitterschichten von den Kanten aus charakteristischen zusammensetzen. Dasselbe gilt zwar auch für v_H, aber die Ablösungsgeschwindigkeit idealer Gittergebiete normal zur Spaltfläche ist, in Übereinstimmung mit dem tangentialen Flächenwachstum, sehr gering, so daß v_H in überwiegendem Maße durch den Gitterfehlbau bestimmt wird.

Wegen des geschichteten Aufbaues der Realkristalle dürfte auch für diesen Kristall die schon einmal ausgesprochene Vermutung zutreffen, daß sich v_D, v_d und v_H in den einzelnen Phasen der Abtragung periodisch ändern müßten, wobei die Perioden wegen der dichten Folge von gestörten Schichten entsprechend kleine Werte annehmen müßten. Die in Tab. 3 angegebenen Werte sind lediglich Mittelwerte für relativ große Zeitabschnitte.

Ein Vergleich der Absolutgeschwindigkeiten, mit denen sich D, d und H beim Abbau vergrößern, mit den an gewöhnlichem Kalzit bei derselben Konzentration gemessenen, zeigt, daß sie bei kurzen Ätzzeiten kleiner sind als an gewöhnlichem Kalzit, und zwar vor allem v_H. Diese Tatsache äußert sich darin, daß bei gegebener Ätzzeit und Konzentration das gesamte, pyramidenförmig abgelöste Volumen ebenfalls kleiner ist und daß wegen der geringeren Tiefenzunahme im Vergleich zur tangentialen Ausbreitung der Ätzgruben die Neigungswinkel der Ätzgrubenwände gegen die Spaltfläche ebenfalls etwas kleiner sind. In dem Bereich, in dem die Volumsabtragung proportional mit t^3 erfolgt, beträgt der Unterschied im abgelösten Kristallvolumen fast 50%. Das wird dadurch bedingt, daß v_H um zirka 30%, v_D und v_d um zirka 10% kleiner sind als an gewöhnlichem Doppelspat. Dafür kann man einerseits die Lage der Gitterstörung verantwortlich machen und andererseits ihre Form und Ausdehnung. Die bei der langsamen Auflösung des Kristalls auftretenden Erscheinungen sprechen dafür, daß die Gitterstörungen nicht symmetrisch im Kristall liegen und daß sie im Vergleich zu den im gewöhnlichen Kalzit vorhandenen einen geringeren Gitterbereich erfassen. Das wirkt sich dahingehend aus, daß die Mehrzahl aller Ätzgruben asymmetrisch gebaut ist und daß sie bei gegebener Ätzzeit kleiner als an gewöhnlichem Doppelspat sind, was bereits in einer früheren Arbeit festgestellt wurde [4]. Damit ist aber gezeigt, daß der Abbau stets in erhöhtem Maße durch den Fehlbau bestimmt wird.

Auch die Tiefenausdehnung der Gitterstörungen muß an diesen Kristallen geringer sein, weil eine merkliche Abnahme von v_H bereits in einer Tiefe von zirka 1 μ einsetzt, während das für gewöhnlichen Kalkspat erst in Tiefen zwischen 2 und 3 μ der Fall ist.

Ätzgrubenbildung höherer Ordnung

Darunter sollen Ätzgruben verstanden werden, die nicht vom ursprünglichen Spaltflächenniveau ausgehen, sondern innerhalb primärer Ätzgruben ausgebildet werden (Abb. 10). Wegen der äußerst geringen Abmessungen der Idealgittergebiete, werden am nachleuchtenden Kalzit bereits nach kurzen Ätzzeiten sekundäre Ätzgruben ausgebildet. Auf diese Tatsache läßt sich zum Teil zurückführen, daß bei Ätzzeiten von 60 sek aufwärts erhebliche Unterschiede in der Tiefe und der Ausdehnung der Ätzgruben auftreten, weil sie zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Tiefen unter dem Spaltflächenniveau ausgebildet werden.

Die Vergleichsversuche am nachleuchtenden Kristall zeigen, daß die Ausbildung von Pyramiden und Pyramidenstümpfen beim Einwirken von Essigsäurelösungen geringer Konzentration eine für alle Kalkspatkristalle charakteristische Eigenschaft ist. Dasselbe gilt auch für die Treppenstruktur der Ätzgrubenwände, die den Beweis für den geschichteten Kristallbau ermöglichte. Die Abbaugesetzmäßigkeiten sind für gewöhnliche und nachleuchtende Kristalle, abgesehen von quantitativen Unterschieden, gleich.

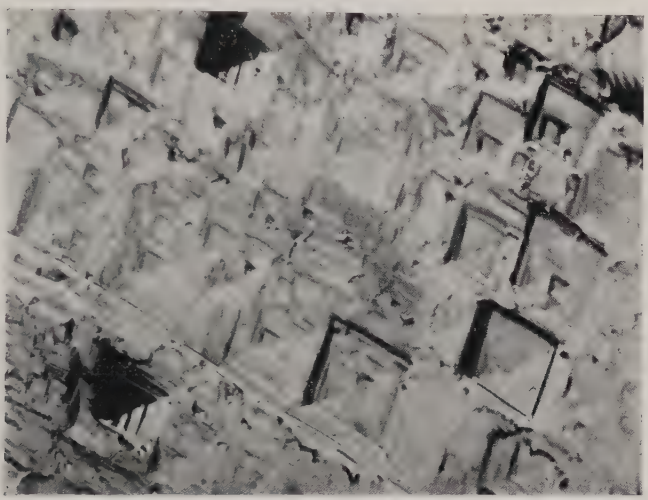

Abb. 10. Zahlreiche Ätzgruben sind innerhalb von primären Gruben vorhanden. Schrägbeleuchtung, Vergr. 1000 : 10

Ich danke meinen Lehrern, Herrn Prof. Dr. A. G. Smekal und Herrn Prof. Dr. J. Wagner für die Anregung zu diesen Untersuchungen und zahlreiche Diskussionen.

Literatur

1. Pfefferkorn, G., Fortschr. Min **29/30**, 34 (1950); N. Jb. Min. Abh. **84**, 3, 281 (1952).
2. Amelinckx, S., Phil. Mag. Ser. 8, **1**, 269 (1956); Gilman, J. J., W. G. Johnston und G. W. Sears, J. Appl. Phys. **29**, 747 (1958).
3. Hanke, I., Störstellen in Kalzitkristallen I. u. II. Acta Phys. Austr. (im Druck)
4. Schösser, I., Anz. Österr. Akad. 1958, 114.

Bremsstrahlung in 2. Bornscher Näherung

Von

P. Urban, Graz

Mit 2 Abbildungen

(*Eingegangen am 8. März 1960*)

Zusammenfassung

Es wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Bremsstrahlung in zweiter Bornscher Näherung bei Annahme eines abgeschirmten Coulomb-Potentiales angegeben. Wegen der Kompliziertheit der Formeln wird der Grenzfall kleiner abgestrahlter Quanten diskutiert. Dabei wird ein in einer früheren Arbeit fälschlich weggelassener Term berücksichtigt und gezeigt, daß sein Einfluß nicht ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Das Auftreten gewisser Integrale erschwert die Diskussion der verschiedenen Grenzfälle. Im Anhang wurden die verschiedenen Typen dieser Integrale zusammengestellt und auf bekannte zurückgeführt.

In einer früheren Arbeit gemeinsam mit meinem Schüler H. Mitter[1] wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Bremsstrahlung in zweiter Bornscher Näherung berechnet. Dabei wurde der Beitrag des Graphen (Abb. 1) in dieser Näherung weggelassen, wobei im Anhang dieser Arbeit das Verschwinden desselben funktionentheoretisch gezeigt wurde. Eine genauere Untersuchung dieses Beweises zeigt, daß diese Behauptung unrichtig ist, daß also auch dieser Beitrag berücksichtigt werden muß. Wir wollen im folgenden das daraus resultierende Korrekturglied allgemein ableiten, wobei wir uns in der Bezeichnungsweise an die früher zitierte Arbeit[1] anschließen, und hiermit die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Bremsstrahlung in zweiter Bornscher Näherung richtigstellen.

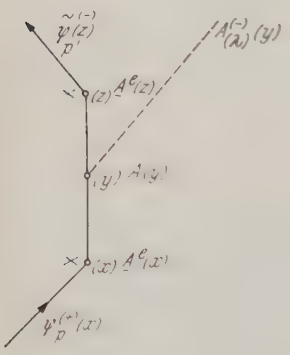

Abb. 1

[1] Siehe Acta Phys. Austriaca Bd. VII, 1953, Heft 4, S. 436.

Dieser Term lautet im Ortsraum

$$-i\left(\frac{\varepsilon}{\hbar c}\right)^3 \int : \tilde{\psi}(z)\, \boldsymbol{A}^e(z)\, S_+(z-y)\, \boldsymbol{A}(y)\, S_+(y-x)\, \boldsymbol{A}^e(x)\, \psi(x) : d^4x\, d^4y\, d^4z, \tag{1}$$

wobei $\varepsilon = \mp |e|$ die Ladung des gebremsten Teilchens (Elektron oder Positron) bedeutet. Bildet man das Matrixelement der R-Matrix ($R = S - 1$), so erhält man

$$\langle 1_{El_{(p')}}\, 1_{Ph_{(k)}} | R^{(2)} | 1_{El_{(p)}} \rangle = -i\left(\frac{\varepsilon}{\hbar c}\right)^3 \int d^4x\, d^4y\, d^4z \{\tilde{\chi}^{(\varepsilon')}_{(p')}(z)\, \boldsymbol{A}^e(z)\, S_+(z-y) \cdot$$
$$\cdot \bar{\mathscr{A}}_{(k)}(y)\, S_+(y-x)\, \boldsymbol{A}^e(x)\, \chi^{(\varepsilon)}_{(p)}(x)\}, \tag{2}$$

wobei die Wellenfunktionen wie folgt definiert werden:

$$\left.\begin{aligned} &\langle 1_{El} | \tilde{\psi}^{(-)}(x) \rangle = \tilde{\chi}^{(\varepsilon)}_{(p)}(x), && \text{Erzeugung eines Elektrons} \\ &\langle \psi^{(-)}(x) | 1_{El} \rangle = \chi^{(\varepsilon)}_{(p)}(x), && \text{Vernichtung eines Elektrons} \\ &\langle 1_{Ph} | A^{(-)}(x) \rangle = \bar{\mathscr{A}}(x), && \text{Erzeugung eines Photons.} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Unter Berücksichtigung dieses Termes ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt nunmehr statt Formel (19) (l. c.)

$$\sigma = \frac{Z^2 \alpha^3}{4\pi^2} \int \frac{d^4k\, \delta(k^2)\, d\Omega_{p'}}{[(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}' - \mathfrak{k})^2 + a^2]} \cdot \frac{|\mathfrak{p}'|}{|\mathfrak{p}|} \cdot X, \tag{4}$$

wobei

$$X = \left\{\frac{1}{[(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}' - \mathfrak{k})^2 + a^2]} - \frac{Z\alpha}{\pi^2} p_0 J_0(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' + \mathfrak{k})\right\}\left\{\frac{Sp\langle 1\rangle}{(p'k)^2} - \frac{Sp\langle 2\rangle}{(pk)(p'k)}\right\} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{[(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}' - \mathfrak{k})^2 + a^2]} - \frac{Z\alpha}{\pi^2} p_0' J_0(\mathfrak{p}', \mathfrak{p} - \mathfrak{k})\right\}\left\{\frac{Sp\langle 3\rangle}{(pk)^2} - \frac{Sp\langle 4\rangle}{(pk)(p'k)}\right\} -$$
$$- \frac{Z\alpha}{\pi^2}\left\{\varkappa J_0(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' - \mathfrak{k})\left[\frac{Sp\langle 5\rangle}{(p'k)^2} - \frac{Sp\langle 6\rangle}{(pk)(p'k)}\right] +\right.$$
$$+ \varkappa J_0(\mathfrak{p}', \mathfrak{p} - \mathfrak{k})\left[\frac{Sp\langle 7\rangle}{(pk)^2} - \frac{Sp\langle 8\rangle}{(pk)(p'k)}\right] +$$
$$+ J_r(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' + \mathfrak{k})\left[\frac{Sp\langle 9\rangle}{(p'k)^2} - \frac{Sp\langle 10\rangle}{(pk)(p'k)}\right] +$$
$$\left. + J_r(\mathfrak{p}', \mathfrak{p} - \mathfrak{k})\left[\frac{Sp\langle 11\rangle}{(pk)^2} - \frac{Sp\langle 12\rangle}{(pk)(p'k)}\right]\right\} - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\frac{1}{(p'k)} \cdot$$
$$\left\{\int \frac{d^3s\, Sp\langle 13\rangle}{[(\mathfrak{s} - \mathfrak{p}')^2 + a^2]\,[\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{s}^2 + i\delta]\,[\mathfrak{p}^2 - (\mathfrak{s} + \mathfrak{k})^2 + i\delta]\,[(\mathfrak{s} + \mathfrak{k} - \mathfrak{p})^2 + a^2]} + \right.$$
$$\left. \int \frac{d^3s\, Sp\langle 13\rangle}{[(\mathfrak{s} - \mathfrak{p}')^2 + a^2]\,[\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{s}^2 - i\delta]\,[\mathfrak{p}^2 - (\mathfrak{s} + \mathfrak{k})^2 - i\delta]\,[(\mathfrak{s} + \mathfrak{k} - \mathfrak{p})^2 + a^2]}\right\} +$$
$$+ \frac{Z\alpha}{\pi^2}\frac{1}{(pk)} \cdot$$

$$\cdot\left\{\int \frac{d^3s\, Sp\,\langle 14\rangle}{[(\mathfrak{s}-\mathfrak{p}')^2+a^2]\,[\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{s}^2+i\delta]\,[\mathfrak{p}^2-(\mathfrak{s}+\mathfrak{k})^2-i\delta]\,[(\mathfrak{s}+\mathfrak{k}-\mathfrak{p})^2-a^2]}+\right.$$

$$\left.+\int \frac{d^3s\, Sp\,\langle 14\rangle}{[(\mathfrak{s}-\mathfrak{p}')^2+a^2]\,[\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{s}^2-i\delta]\,[\mathfrak{p}^2-(\mathfrak{s}-\mathfrak{k})^2-i\delta]\,[(\mathfrak{s}-\mathfrak{k}-\mathfrak{p})^2+a^2]}\right\}$$

gilt und für $\left\{\begin{matrix} Z=+Z \\ Z=-Z \end{matrix}\right\}$ im Falle $\left\{\begin{matrix} \text{Elektron} \\ \text{Positron} \end{matrix}\right\}$ zu setzen ist.

Die letzten zwei Terme mit den Spuren ⟨13⟩ und ⟨14⟩ kommen neu hinzu. Die Spuren ⟨1⟩ bis ⟨12⟩ sind der früheren Arbeit zu entnehmen, wobei zu beachten ist, daß wir früher statt $\varkappa$, m gesetzt haben, da wir $\hbar = c = 1$ gesetzt hatten. Die neu hinzukommenden Spurenausdrücke sind allgemein

$$\left(\varkappa = \frac{m\,c}{\hbar}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} Sp\,\langle 13\rangle &= \\ = \tfrac{1}{4}\,Sp\,(\boldsymbol{p}+\varkappa)\,\gamma_0(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}-\varkappa)\,\gamma_\mu(\boldsymbol{p}'-\varkappa)\,\gamma_0(\boldsymbol{s}-\varkappa)\,\gamma^\mu(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{k}-\varkappa)\,\gamma_0 & \\ Sp\,\langle 14\rangle &= \\ = \tfrac{1}{4}\,Sp(\boldsymbol{p}+\varkappa)\,\gamma_\mu(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}+\varkappa)\,\gamma_0(\boldsymbol{p}'+\varkappa)\,\gamma_0(\boldsymbol{s}+\varkappa)\,\gamma^\mu(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{k}+\varkappa)\,\gamma_0 & \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und ergeben sich nach Ausrechnung zu

$$\left.\begin{aligned} Sp\,\langle 13\rangle = 2\varkappa^2\,p_0\{2\,[(p\,s)-(k\,s)+(p\,k)-\widehat{(s\,s)}-2\,\widehat{(s\,k)}- \\ -2\,\widehat{(p'\,s)}-\widehat{(p'\,k)}-(k\,k)]-s^2-3\,\varkappa^2-(p'\,k)+(p\,p')\}+ \\ +2\,\varkappa^2\,p_0'\{2\,[(k\,s)-(p'\,k)-(p'\,s)-(p\,s)]-3\,\varkappa^2-s^2- \\ -7\,(p\,k)-3\,(p\,p')+16\,p_0^2\}+4\,p_0'\{(p\,k)\,(k\,s)+(p\,k)\,(p'\,k)+ \\ +(p\,k)\,(p'\,s)\}-4\,p_0\{(p\,s)\,(p'\,s)-(p\,p')\,(p'\,s)-(p'\,k)\,(p'\,s)- \\ -(p'\,s)^2-2\,\widehat{(p'\,s)}\,(p'\,s)-2\,\widehat{(p'\,s)}\,(p'\,k)+(p'\,s)\,(k\,s)+ \\ +(p\,k)\,(p'\,s)\}+2\,p_0'\,s^2\,[(p\,k)+(p\,p')]+2\,p_0\,s^2\,[(p\,p')+ \\ +(p'\,k)]-8\,p_0^2\,p_0'\,s^2-8\,p_0\,p_0'\,k_0\,(k\,s)+ \\ +8\,p_0\,k_0\,(p'\,s)\,(p_0+p_0')-8\,p_0\,p_0'\,(p'\,k)\,(p_0+p_0') \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und daraus, wenn man $s \to s+k$, $p \rightleftarrows p'$, $k \to -k$ ersetzt $(p_0 = p_0' - k_0)$

$$\left.\begin{aligned} Sp\,\langle 14\rangle = 2\varkappa^2\,p_0\{3\,\varkappa^2-s^2+5\,(p'\,k)-3\,(p\,p')+16\,p_0'^2+ \\ +2\,[(p\,s)-(p'\,s)-2\,(k\,s)]\}+2\,\varkappa^2\,p_0'\{(p\,k)+(p\,p')- \\ -s^2-3\,\varkappa^2+2\,[(p'\,s)-\widehat{(s\,s)}-2\,\widehat{(p\,s)}-\widehat{(p\,k)}]\}- \\ -4\,p_0'\{(p'\,s)\,(p\,s)-(p\,s)^2-(p\,s)\,(k\,s)-2\,\widehat{(p\,s)}\,(p\,s)+ \\ +(p'\,s)\,(p\,k)+(p\,p')\,(p\,s)-(p\,s)\,(p\,k)-2\,(p\,s)\,\widehat{(p\,k)}- \\ -(p\,p')\,(k\,s)+(p\,p')\,(p\,k)\}+4\,p_0\{(p\,p')\,(s\,k)-(p'\,k)\,(p\,s)\}+ \\ +2\,s^2\{(p\,p')\,(p_0+p_0')-p_0\,(p'\,k)-p_0'\,(p\,k)\}-8\,p_0'^2\,p_0\,s^2- \\ -8\,p_0'\,(p_0+p_0')\,[p_0\,(k\,s)+k_0\,(p\,s)-p_0'\,(p\,k)], \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hierbei wird von der Abkürzung $\widehat{(p\,k)} = p_0\,k_0 + (\mathfrak{p}\,\mathfrak{k})$ Gebrauch gemacht, um zu vereinfachen.

Die frühere Formel (10) lautet nunmehr

$$\left.\begin{aligned}
\sigma &= \frac{Z^2\alpha^3}{4\pi^2}\int d^4k\,\delta(k^2)\,d\Omega_{p'}\,\frac{|\mathfrak{p}'|}{|\mathfrak{p}|}X, \qquad \text{mit}\\
X &= \tfrac{1}{4}Sp\,(\boldsymbol{p}+\varkappa)\Big[\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}-\mathfrak{p})\,\frac{\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}+\varkappa}{(p'k)}\,\gamma_\mu -\\
&\quad -\gamma_\mu\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}+\varkappa}{(pk)}\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}-\mathfrak{p})\Big]\cdot\\
&\quad\cdot(\boldsymbol{p}'+\varkappa)\Big\{\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}+\varkappa}{(p'k)}\Big[\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}-\mathfrak{p}) -\\
&\quad -\frac{Z\alpha}{\pi^2}(\mathfrak{p}_0\gamma_0+\varkappa)\,J_0\,(\mathfrak{p},\,\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}) - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_r\,J_r\,(\mathfrak{p},\,\mathfrak{p}'+\mathfrak{k})\Big] -\\
&\quad -\Big[\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}-\mathfrak{p}) - \frac{Z\alpha}{\pi^2}(\mathfrak{p}_0'\gamma_0+\varkappa)\,J_0(\mathfrak{p}',\,\mathfrak{p}-\mathfrak{k}) -\\
&\quad -\frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_r\,J_r\,(\mathfrak{p}',\,\mathfrak{p}-\mathfrak{k})\Big]\frac{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}+\varkappa}{(pk)}\gamma^\mu - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0\,J_+^\mu\,\gamma_0 -\\
&\quad -\frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0\,J_-^\mu\,\gamma_0\Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wobei wir

$$\psi\,(\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}-\mathfrak{p}) = \frac{1}{(\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}-\mathfrak{p})^2+a^2} \tag{8 a}$$

gesetzt haben (a bedeutet die Abschirmungskonstante); (8 a) stellt im wesentlichen die Impulsraumdarstellung für das abgeschirmte Coloumb-Potential dar:

$$\varphi = \frac{Ze}{4\pi r}\,e^{-ar} \qquad \text{in Heaviside-Einheiten;} \tag{8 b}$$

die beiden Integrale $J_\pm^{(\mu)}$ sind

$$= \int \frac{d^3s\,(\boldsymbol{s}+\varkappa)\,\gamma_\mu(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{k}+\varkappa)}{[(\mathfrak{s}-\mathfrak{p}')^2+a^2]\,[\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{s}^2\pm i\,\delta]\,[\mathfrak{p}^2-(\mathfrak{s}+\mathfrak{k})^2\pm i\,\delta]\,[(\mathfrak{s}+\mathfrak{k}-\mathfrak{p})^2+a^2]}. \tag{8 c}$$

Die anderen in der Formel (8) auftretenden Integrale J_0 und J_r sind im Anschluß an die frühere Arbeit im Anhang definiert. Im Falle kleiner abgestrahlter Quanten kann überall k gegen p, p' vernachlässigt werden. Man erhält auf Grund von

$$\left.\begin{aligned}
J_0\,(\mathfrak{p},\,\mathfrak{p}') &= \frac{1}{|\mathfrak{p}|^3}J_0\,(\mathfrak{e},\,\mathfrak{e}';\,b) = J_0\,(\mathfrak{p}',\,\mathfrak{p}); \qquad \mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{p}-\mathfrak{k}}{|\mathfrak{p}'|}; \qquad \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}'+\mathfrak{k}}{|\mathfrak{p}|}\\
J_0\,(\mathfrak{p}',\,\mathfrak{p}) &= \frac{J_0\,(\mathfrak{e}',\,\mathfrak{e};\,b)}{|\mathfrak{p}'|^3}; \qquad \mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{p}}{|\mathfrak{p}'|} = \mathfrak{e};\\
J_0\,(\mathfrak{e},\,\mathfrak{e}';\,b) &= J_0\,(\mathfrak{e}',\,\mathfrak{e};\,b); \qquad \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{p}'}{|\mathfrak{p}|} = \mathfrak{e}'; \qquad \mathfrak{p}_0' \sim \mathfrak{p}_0
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

aus (8)

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{4\pi^2}\int d^4k\,\delta(k^2)\,d\Omega_{p'}\frac{|\mathfrak{p}'|}{|\mathfrak{p}|}X, \qquad \text{mit} \qquad (|\mathfrak{p}'| = |\mathfrak{p}|)\\
&X = \frac{1}{4}Sp\,(\boldsymbol{p}+\varkappa)\left[\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'-\mathfrak{p})\frac{\boldsymbol{p}'+k}{(p'\,k)}\gamma_\mu - \right.\\
&\left. - \gamma_\mu\frac{\boldsymbol{p}+k}{(p\,k)}\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'-\mathfrak{p})\right](\boldsymbol{p}'+\varkappa)\left\{\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{p}'+k}{(p'\,k)}\cdot\right.\\
&\cdot\overbrace{\left[\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'-\mathfrak{p}) - \frac{Z\alpha}{\pi^2}(p_0\gamma_0+\varkappa)\,J_0\,(\mathfrak{p},\mathfrak{p}') - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_r J_r(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')\right]}^{[1]} -\\
&- \underbrace{\left[\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'-\mathfrak{p}) - \frac{Z\alpha}{\pi^2}(p_0\gamma_0+\varkappa)\,J_0\,(\mathfrak{p}',\mathfrak{p}) - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_r J_r\,(\mathfrak{p}',\mathfrak{p})\right]}_{[2]}\cdot\\
&\left.\cdot\frac{\boldsymbol{p}+k}{(p\,k)}\gamma^\mu - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0 J_+^\mu\,\gamma_0 - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0 J_-^\mu\,\gamma_0\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei bedeutet nun $J_\pm$ in diesem Falle

$$J_\pm^\mu = \int d^3s\,\frac{(\boldsymbol{s}+k)\,\gamma^\mu\,(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{k}+\varkappa)}{[(\mathfrak{s}-\mathfrak{p}')^2+a^2]\,[\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{s}^2\pm i\,\delta]\,[\mathfrak{p}^2-\mathfrak{s}^2\pm i\,\delta]\,[(\mathfrak{s}-\mathfrak{p})^2+a^2]};$$

$k = 0$ im Nenner gesetzt! (10 a)

Setzt man

$$X = \tfrac{1}{4}\,\psi\,(\mathfrak{p}'-\mathfrak{p})\,Y \tag{11}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
&Y = Sp\,(\boldsymbol{p}+\varkappa)\left[\gamma_0\frac{\boldsymbol{p}'+\varkappa}{(p'\,k)}\gamma_\mu - \gamma_\mu\frac{\boldsymbol{p}+\varkappa}{(p\,k)}\gamma_0\right](\boldsymbol{p}'+\varkappa)\,\{\ldots\}\\
&\{\ldots\} = \left\{\gamma^\mu\frac{\boldsymbol{p}'+k}{(p'\,k)}\,[1] - [2]\,\frac{\boldsymbol{p}+k}{(p\,k)}\gamma^\mu - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0\,J_\pm^\mu\,\gamma_0 - \right.\\
&\left. - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0\,J_-^\mu\,\gamma_0\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{11 a}$$

so erhält man, da in dieser Näherung $[1] \cong [2]$ gilt,

$$\left.\begin{aligned}
&Y = 4\,Sp\,(\boldsymbol{p}+\varkappa)\,\gamma_0\,(\boldsymbol{p}'+\varkappa)\left(\frac{p'}{(p'\,k)} - \frac{p}{(p\,k)}\right)^2\left\{\gamma_0\,\psi\,(\mathfrak{p}'-\mathfrak{p}) - \right.\\
&\left. - \frac{Z\alpha}{\pi^2}(p_0\gamma_0+\varkappa)\,J_0\,(\mathfrak{p},\mathfrak{p}') - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_r J_r\,(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')\right\} + Y'\\
&Y' = Sp\,(\boldsymbol{p}+\varkappa)\left[\gamma_0\frac{\boldsymbol{p}'+\varkappa}{(p'\,k)}\gamma_\mu - \gamma_\mu\frac{\boldsymbol{p}+\varkappa}{(p\,k)}\gamma_0\right]\cdot\\
&\cdot(\boldsymbol{p}+\varkappa)\left\{-\frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0\,J_+^\mu\,\gamma_0 - \frac{Z\alpha}{\pi^2}\gamma_0\,J_-^\mu\,\gamma_0\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Statt unserer früheren Formel (13) erhält man nunmehr ($|\mathfrak{p}'| \doteq |\mathfrak{p}|$)

$$\sigma \sim \frac{Z^2 \alpha^3}{4\pi^2} \int d^4k\, \delta(k^2)\, d\Omega_{p'}\, X \tag{13}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{4}\, \psi(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}) \cdot Y \\ Y &= 4\, Sp\,(\boldsymbol{p} + \varkappa)\, \gamma_0\, (\boldsymbol{p}' + k) \left(\frac{p'}{(p'\varkappa)} - \frac{p}{(p\,k)}\right)^2 \left\{\gamma_0\, \psi(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}) - \right. \\ &\left. \cdot \frac{Z\alpha}{\pi^2} (p_0 \gamma_0 + \varkappa)\, J_0(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') - \frac{Z\alpha}{\pi^2} \gamma_r J_r(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')_{(r=1,2,3)} \right\} + Y' \\ Y' &= Sp\,(\boldsymbol{p} + \varkappa) \left[\gamma_0 \frac{\boldsymbol{p}' + \varkappa}{(p'\,k)} \gamma_\mu - \gamma_\mu \frac{\boldsymbol{p} + \varkappa}{(p\,k)} \gamma_0\right] \cdot \\ &\cdot (\boldsymbol{p}' + \varkappa) \left\{-\frac{Z\alpha}{\pi^2} \gamma_0 J_+^\mu \gamma_0 - \frac{Z\alpha}{\pi^2} \gamma_0 J_-^\mu \gamma_0\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{13 a}$$

Y' entspricht dem weggelassenen Term in der früheren Arbeit für den Fall kleiner abgestrahlter Quanten und es ist fraglich ob es gerechtfertigt erscheint, diesen Term zu vernachlässigen. Durch Einsetzen unseres Integranden $J_\pm$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} Y' = &-\frac{Z\alpha}{\pi^2} \int \frac{d^3s}{\{(\mathfrak{s} - \mathfrak{p}')^2 + a^2\}\{(\mathfrak{s} - \mathfrak{p})^2 + a^2\}} \cdot \\ &\cdot Sp\,(\boldsymbol{p} + \varkappa) \left[\gamma_0 \frac{\boldsymbol{p}' + \varkappa}{(p'\,k)} \gamma_\mu - \gamma_\mu \frac{\boldsymbol{p} + \varkappa}{(p\,k)} \gamma_0\right] (\boldsymbol{p}' + \varkappa) \cdot \\ \cdot &\left\{\frac{\gamma_0\, (\boldsymbol{s} + \varkappa)\, \gamma^\mu\, (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{k} + \varkappa)\, \gamma_0}{[\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{s}^2 + i\,\delta]\,[\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{s}^2 + i\,\delta]} + \frac{\gamma_0\, (\boldsymbol{s} + \varkappa)\, \gamma^\mu\, (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{k} + \varkappa)\, \gamma_0}{[\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{s}^2 - i\,\delta]\,[\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{s}^2 - i\,\delta]}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} Y' = &-\frac{Z\alpha}{\pi^2} \int \frac{d^3s}{[(\mathfrak{s} - \mathfrak{p}')^2 + a^2]\,[(\mathfrak{s} - \mathfrak{p})^2 + a^2]} \cdot \\ &\cdot \left\{\frac{1}{[\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{s}^2 + i\,\delta]\,[\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{s}^2 + i\,\delta]} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{[\mathfrak{p}'^2 - \mathfrak{s}^2 - i\,\delta]\,[\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{s}^2 - i\,\delta]}\right\} \left[\frac{A}{(p'\,k)} - \frac{B}{(p\,k)}\right], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A &= 4\, p_0 \{(p'\,s)\,[4\, p_0{}^2 + 3\,\varkappa^2 - (p'\,s) - (p\,s) - (p\,p') - (p'\,k)] + \\ &[2\, p_0{}^2 - (p\,p')]\,[\varkappa^2 - s^2 - (s\,k) - (p'\,k)] - \varkappa^2\,(p\,k) + 2\,(p'\,k)\}, \\ B &= 4\, p_0 \{[(p\,s) + (p\,k)]\,[4\, p_0{}^2 + 3\,\varkappa^2 - (p'\,s) - (p\,s) - \\ &- (p\,p') - (p\,k)] + [2\, p_0{}^2 - (p\,p')]\,[\varkappa^2 - s^2 - (s\,k) + (p\,k)] - \\ &- \varkappa^2\,(p'\,k) - 2\,(p\,k)\}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Einer numerischen Bearbeitung dieses Ausdruckes liegt nichts im Wege, wenn die auftretenden Integrale mittels unseres Anhanges auf

die drei dort angegebenen Normalintegrale zurückgeführt werden. Für den Fall $k \to 0$ werden die Spuren ⟨13⟩ und ⟨14⟩ einander gleich, heben sich also weg, so daß wir auf Formel (14) unserer alten Arbeit (l. c.) zurückkommen und damit eine Übereinstimmung mit McKINLEY-FESHBACH hergestellt wird.

Anhang

Der Typus

$$J_{0,r} = J_{0,r}(\mathfrak{w}, \mathfrak{y}, a) = \int d^3s \, \frac{(1; s_r)}{[(\mathfrak{s}-\mathfrak{w})^2 - a^2]\,[(\mathfrak{s}-\mathfrak{y})^2 - a^2]\,[1 - \mathfrak{s}^2 - i\delta]} =$$

$$= (J_0, J)$$

wird allgemein zurückgeführt auf die drei Integrale

$$K(\mathfrak{y}) = \int_P \frac{d^3s}{[a^2 + (\mathfrak{s}-\mathfrak{y})^2]\,[p^2 - \mathfrak{s}^2]}; \qquad p = |\mathfrak{p}|;$$

$$L(\mathfrak{p}, \mathfrak{y}) = \int_P \frac{d^3s}{[a^2 + (\mathfrak{s}-\mathfrak{p})^2]\,[a^2 + (\mathfrak{s}-\mathfrak{y})^2]} \qquad \text{und } J_0.$$

Als Ausgangspunkt wählt man am besten das Integral

$$J = \int \frac{d^3\mathfrak{q}}{\underbrace{[(\mathfrak{q}-\mathfrak{P})^2 + \Lambda^2]}_{[1]}\,\underbrace{[p^2 - q^2 + i\varepsilon]}_{[2]}} = \frac{\pi^2 i}{P} \ln\left(\frac{p - P - i\varepsilon}{p + P + i\varepsilon}\right) = \int \frac{d^3s}{[1]\,[2]},$$

$$P = |\mathfrak{P}| \tag{1}$$

wobei der Hauptwert

$$\int_P \frac{d^3s}{[(\mathfrak{s}-\mathfrak{P})^2 + \Lambda^2]\,[p^2 - \mathfrak{s}^2]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int \frac{d^3s}{[1]\,[p^2 - q^2 + i\varepsilon]} + \int \frac{d^3s}{[1]\,[p^2 - q^2 - i\varepsilon]}\right\} =$$

$$= \text{Real}\left\{\frac{\pi^2 i}{P} \ln\left(\frac{p - P + i\varepsilon}{p + P + i\varepsilon}\right)\right\}, \tag{1 a}$$

definiert wird.

Aus diesem Integral erhält man durch Differentationen die wichtigen Integrale

$$\int \frac{d^3\mathfrak{q}}{[1]^2\,[2]} = \frac{\pi^2}{\Lambda N}; \qquad N = (p - P + i\Lambda)(p + P + i\Lambda) = (p + i\Lambda)^2 - P^2; \tag{2}$$

$$\int \frac{d^3\mathfrak{q}}{[1]^2\,[2]^2} = \frac{\pi^2 (p + i\Lambda)}{\Lambda N^2 p}; \tag{3}$$

$$\int \frac{d^3\mathfrak{q}}{[1]\,[2]^2} = -\frac{\pi^2 i}{p N}; \tag{4}$$

$$\int \frac{\mathfrak{q}_r\, d^3\mathfrak{q}}{[1]^2\,[2]} = \pi^2 P_r \left\{\frac{1}{\Lambda N} - \frac{i}{2P^3} \ln\left(\frac{p - P + i\Lambda}{p + P + i\Lambda}\right) - \frac{i}{P^2 N}(p + i\Lambda)\right\}; \tag{5}$$

$$\int \frac{\mathfrak{q}_r\, d^3\mathfrak{q}}{[1]\,[2]} = \frac{\pi^2\, P_r}{P}\left\{\frac{\Lambda + i\,p}{P} + i\,\frac{p^2 + P^2 + \Lambda^2}{2\,P^2}\ln\left(\frac{p - P + i\,\Lambda}{p + P + i\,\Lambda}\right)\right\}; \tag{6}$$

$$\int \frac{\mathfrak{q}_r\, d^3\mathfrak{q}}{[1]^2\,[2]^2} = \pi^2\, P_r\left\{\frac{p + i\,\Lambda}{p\,\Lambda\,N^2} - \frac{i\,(p + i\,\Lambda)^2}{p\,P^2\,N^2} + \frac{i}{P^2\,N_p}\right\}; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{q}_r\,\mathfrak{q}_s\, d^3\mathfrak{q}}{[1]^2\,[2]^2} = &-\frac{\pi^2\,\delta rs}{4\,P_p}\left\{\frac{i}{P} + \frac{p\,i}{P^2}\ln\left(\frac{p - P + i\,\Lambda}{p + P + i\,\Lambda}\right) + i\,\frac{p^2 + P^2 + \Lambda^2}{P\,N}\right\} + \\ &+ \frac{\pi^2\, P_r\, P_s}{4\,p\,P}\left\{\frac{3\,i\,p}{P^4}\ln\left(\frac{p - P + i\,\Lambda}{p + P + i\,\Lambda}\right) + \frac{3\,i}{P^3\,N}(P^2 + p^2 + \Lambda^2) + \frac{2\,i}{P^3} + \right. \\ &+ \frac{4\,P\,(p + i\,\Lambda)}{\Lambda\,N^2} + \frac{i\,2\,p}{P^3\,N}(p + i\,\Lambda) + \frac{i\,(p^2 + 3\,P^2 + \Lambda^2)}{N\,P^3} - \\ &\left. - 2\,i\,\frac{(p^2 + 3\,P^2 + \Lambda^2)}{P^3\,N^2}(p + i\,\Lambda)^2\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Man findet

$$K(\mathfrak{y}) = -\frac{\pi^2}{y}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\,a\,y}{p^2 - y^2 + a^2}; \qquad y = |\mathfrak{y}|; \qquad p = |\mathfrak{p}|; \tag{9}$$

daher ist

$$K(\mathfrak{p}) = -\frac{\pi^2}{p}\operatorname{arc\,cotg}\frac{a}{2\,p} = -\frac{\pi^2}{p}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\,p}{a}, \tag{9 a}$$

und für klein a entwickelt:

$$K(\mathfrak{p}) \cong -\frac{\pi^3}{2\,p} + \frac{\pi^2\,a}{2\,p^2} - \frac{\pi^2\,a^3}{24\,p^4} + - \ldots; \tag{9 b}$$

Im Falle

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{e}',\ (p^2 = 1) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{e},\ (y^2 = 1)$$

erhält man

$$K(\mathfrak{e}') = -\pi^2\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{a} \tag{9 c}$$

und für $a = 0$

$$K(\mathfrak{e}') = -\frac{\pi^3}{2} = K(\mathfrak{e}). \tag{9 d}$$

$$L(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = L(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \frac{2\,\pi^2}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|}\operatorname{arc\,sin}\frac{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|}{\sqrt{(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})^2 + 4\,a^2}} \tag{10}$$

und bei Entwicklung nach kleinem a:

$$L(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim \frac{2\,\pi^2}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{2\,a}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|} + \frac{8\,a^3}{3\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})^3} - + \ldots\right\} \tag{10 a}$$

Ist $a = 0$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{e}'$, so erhält man

$$L(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}') = L(\mathfrak{e}', \mathfrak{e}) = \frac{2\,\pi^2}{|\mathfrak{e} - \mathfrak{e}'|}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{|\mathfrak{e} - \mathfrak{e}'|}. \tag{10 b}$$

Das Hauptwertintegral

$$J_0^P(\mathfrak{x},\mathfrak{y};a)=\overset{P}{\int}\frac{d^3v}{[(\mathfrak{v}-\mathfrak{x})^2+a^2]\,[(\mathfrak{v}-\mathfrak{y})^2+a^2]\,[p^2-v^2]},\ \text{ergibt sich zu}$$

$$\left.\begin{aligned}&=-\frac{\pi^2}{4}\overset{P}{\int_{-1}^{+1}}\frac{dz}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}(1-z^2)(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})^2}}\cdot\\&\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2-p^2+\frac{\mathfrak{x}^2}{2}(1-z)+\frac{\mathfrak{y}^2}{2}(1-z)-2ip\sqrt{\ }}}+K\cdot K\right\}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

mit

$$\sqrt{\ }=\sqrt{a^2-\tfrac{1}{4}(1-z^2)(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})^2},$$

was zwar zu integrieren ist, aber zu sehr komplizierten Ausdrücken führt.

Setzen wir dann

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{x}=\mathfrak{e}\\ \mathfrak{y}=\mathfrak{e}'\end{matrix}\right\}$$

so ergibt sich daraus

$$\left.\begin{aligned}J_0^P(\mathfrak{e},\mathfrak{e}';a)&=-\frac{\pi^2a^2}{2}\overset{P}{\int_{-1}^{+1}}\frac{dz}{\sqrt{a^2+(1-z^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}}\cdot\\&\cdot\frac{1}{\left[a^4+4a^2+4\sin^2\frac{\vartheta}{2}(1-z^2)\right]}\\&=-\frac{\pi^2}{\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{M}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{M}},\qquad\text{mit}\qquad M=a^4+4a^2+4\sin^2\frac{\vartheta}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{11a}$$

und für kleines a

$$J_0^P(\mathfrak{e},\mathfrak{e}';a)\sim-\frac{\pi^2a}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}+-\ldots.\tag{11b}$$

Für $a=0$ erhält man daher

$$J_0^P(\mathfrak{x},\mathfrak{y};0)=-\frac{\pi^2}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|}\overset{P}{\int_{-1}^{+1}}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2p^2-\mathfrak{x}^2(1+z)-\mathfrak{y}^2(1-z)-2ip|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\sqrt{1-z^2}}+K\cdot K\right\}\tag{11c}$$

und für

$$J_0^P(\mathfrak{e},\mathfrak{e}',0)=0.\tag{11d}$$

Man erhält daher für unser Integral (im Coulomb-Fall!)

$$2\vec{J}(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}', 0) = -\frac{\pi^3\left(1 - \sin\frac{\vartheta}{2}\right)}{4\sin\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}}(\mathfrak{e} + \mathfrak{e}') \tag{12}$$

wobei der Winkel ϑ aus der Abb. 2 ersichtlich ist.

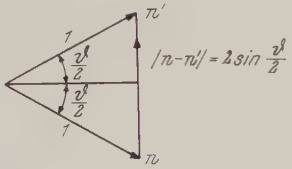

Abb. 2

Prof. C. J. Bakker †

Prof. BAKKER fand bei einem Flugzeugunfall ein tragisches Ende, als er sich zu einer Tagung der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft nach Washington begeben wollte. Da es sich bei dem Dahingeschiedenen nicht allein um den Generaldirektor des CERN (European Organization for Nuclear Research) handelt, sondern auch um einen prominenten Experimentalphysiker und liebenswerten Menschen, ist es nur allzu angebracht, seine Leistungen und seinen Lebenslauf in Form eines kurzen Nachrufes zu würdigen.

CORNELIS JAN BAKKER wurde 1904 geboren und absolvierte seine physikalischen Studien an der Universität Amsterdam bei Prof. ZEEMAN. Er erwarb 1931 den Doktorgrad (cum laude) auf Grund einer Dissertation über den ZEEMAN-Effekt der Spektren der Edelgase. Hierauf verbrachte er ein Jahr am Imperial College of Science in London, woselbst er seine Arbeiten auf dem Gebiete der Spektroskopie vervollständigte. Im folgenden Jahr wurde er wissenschaftliches Mitglied der Fa. Philips, Eindhoven, und beschäftigte sich mit der Untersuchung verschiedener Probleme der Radiotechnik. Sein Hauptinteresse war jedoch der Kernphysik zugewandt und so konstruierte er während des Krieges in Zusammenarbeit mit Prof. HEYN ein Zyklotron für Philips. 1946 folgte er GORTER als Professor für Physik und Direktor des Zeeman-Laboratoriums an die Universität Amsterdam. Er wurde auch Direktor des Institutes für Kernphysik der zentralen Stelle für die holländische Kernforschung. Bei den Untersuchungen, welche er zusammen mit seinen Mitarbeitern ausführte, wurde das vorhin genannte Zyklotron benützt. BAKKER wurde auch Mitglied der Königlich Niederländischen Akademie der Wissenschaften. 1951 wurde er von Prof. AUGER, Direktor der Abteilung für Naturwissenschaften bei der UNESCO, eingeladen, beim CERN mitzuarbeiten und gemeinsam mit sieben anderen Experten einen Plan für zukünftige Forschungsarbeiten daselbst auszuarbeiten. Kurze Zeit darauf wurde Prof. BAKKER, 1952, zum Direktor der Synchrozyklotrongruppe ernannt. Vom 1. Juli 1955 an war er hauptamtlich zum Generaldirektor des CERN bestellt worden, als Nachfolger von Prof. BLOCH. In der Zeit von 1955 bis zum heutigen Tag, während welcher Prof. BAKKER das Amt eines Generaldirektors ausübte, wuchs der CERN zu einem Internationalen Laboratorium heran und stellt heute eine der bestausgerüsteten Forschungsstellen der Welt dar, welche wertvolle Beiträge zu den Forschungen der hochenergetischen Physik liefert.

In seine Zeit fällt auch der Bau und die Fertigstellung des größten Protonsynchrotrons der Welt, welches bereits wertvolle Forschungsergebnisse hervorbringt. Die Bedeutung des letztgenannten Erfolges wurde von der ganzen wissenschaftlichen Welt anerkannt und die Inbetriebnahme der PS-Maschine am 5. Februar 1960 stellt in gewisser Beziehung einen Höhepunkt im Leben unseres allzu früh Verstorbenen dar, welcher sowohl in persönlicher wie wissenschaftlicher Hinsicht eine führende Rolle dabei gespielt hat.

Das Hinscheiden von Prof. Bakker verursachte nicht nur eine große Lücke im Kreise der heutigen Physiker, sondern erfüllt auch uns österreichische Physiker mit großer Trauer, da wir in ihm einen großen Freund und Förderer verlieren. Wir werden ihm allezeit ein treues Andenken bewahren.

P. Urban, Graz

Buchbesprechungen

IXth International Astronautical Congress / IX. Internationaler Astronautischer Kongreß / IXe Congrès International d'Astronautique. Amsterdam 1958. Proceedings — Bericht — Comptes rendus. Herausgegeben von W. v. Braun, A. Eula, B. Fraeijs de Veubeke, F. Hecht, W. B. Klemperer, J. M. J. Kooy, F. I. Ordway III, E. Sänger, K. Schütte, L. I. Sedov, L. R. Shepherd, J. Stemmer. Schriftleitung: F. Hecht. Mit 424 Figuren. I. Teilband: XII, Seite 1—506, II. Teilband: II, Seite 507—970. Gr.-8°. Wien: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen S 1248.—. Vorzugspreis für Mitglieder der an die IAF angeschlossenen Gesellschaften und für Bezieher der „Astronautica Acta": Ganzleinen S 998.40.

Die „International Astronautical Federation" wurde im Jahre 1950 in Paris gegründet und hat seit dieser Zeit eine zunehmende Aktivität entwickelt. Für den vorletzten Kongreß liegt nun der Kongreßbericht in Form von zwei voluminösen Bänden vor. Der Großteil der Beiträge hat mathematischen oder technischen Charakter, was beweist, daß es trotz auch heute noch manchmal vorkommender Diskriminierungen eine wissenschaftliche Astronautik gibt. Die Lektüre der meisten Artikel setzt größere mathematische und technologische Kenntnisse voraus und ist daher in erster Linie für den engeren Fachmann bestimmt. Daneben gibt es eine Anzahl von gemeinverständlichen Beiträgen wie etwa "The Explorers" von W. v. Braun, "Scientific Results from the Explorer Satellites" von A. R. Hibbs, "Exploration of the Upper Atmosphere by the Help of the Third Soviet Sputnik" von V. I. Krassovsky. Erwähnenswert ist auch der Artikel von H. H. Koelle: "On the Development of Orbital Techniques" mit 860 Referenzen! Von den 74 Beiträgen sind 53 in englischer, 13 in deutscher, 5 in französischer, 2 in italienischer und einer in russischer Sprache abgefaßt. Den meisten Beiträgen geht eine kurze Zusammenfassung in den drei Kongreßsprachen Englisch, Deutsch und Französisch voraus. Die Reihenfolge der Arbeiten ist aus drucktechnischen Gründen ungeordnet; doch besitzt der 1. Band sowohl ein thematisch geordnetes Inhaltsverzeichnis als auch ein alphabetisches Mitarbeiterverzeichnis. Die thematische Einteilung gliedert sich in die Kapitel: I. Astronautik, Allgemeines (5 Artikel) — II. Erforschung der hohen Atmosphäre (2) — III. Raumfahrtphysik, Astrophysik (9) — IV. Raumfahrttechnik (10) — V. Raketenantriebe (30) VI. Künstliche Satelliten (13) — VII. Raumfahrtbiologie und -medizin (5).

Alle ernsten Interessenten der Astronautik, die die nötigen Grundlagen besitzen, werden in den zwei Bänden eine Fülle von Informationen finden. In den Bibliotheken aller wissenschaftlichen Institute, deren Fach Berührungspunkte mit der Astronautik besitzen, sollte dieses Buch nicht fehlen.

Die Ausstattung der Bände läßt keine Wünsche offen. Druck, Papier und Illustrationen sind ausgezeichnet. A. Purgathofer, Wien

Beiträge zur Physik und Chemie des 20. Jahrhunderts. Erste Auflage. Lise Meitner, Otto Hahn und Max von Laue zum 80. Geburtstag. Herausgegeben von Frisch, Paneth und Laves Rosbaud. Mit 89 Abb., 3 Porträts, XI, 285 S. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn. 1959. Leinen DM 29.50.

Der vorliegende Sammelband stellt eine Ehrung der drei berühmten Pioniere der Physik aus Anlaß des 80. Geburtstages dar. Maßgebliche Wissenschaftler aus

der ganzen Welt haben Beiträge zu diesem Band geliefert, in denen sie von ihren neuesten Forschungsergebnissen berichten. Man findet aber auch eine Anzahl interessanter Erinnerungen persönlicher Art, die sich auf unsere Jubilare beziehen und die drei geehrten uns menschlich näher bringen. Der Band stellt so ein getreues Abbild der vielfältigen Gebiete dar, auf denen die Jubilare wissenschaftlich tätig waren, außerdem wird die stürmische Entwicklung vor Augen geführt, welche die Physik in den letzten Jahren mitgemacht hat. P. URBAN, Graz

Die Physik des experimentellen Arbeitens. Von H. J. J. BRADDICK. Bearbeitet von H. R. BACHMANN. 384 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. DM 28.—.

Das vorliegende Buch richtet sich an den großen Kreis all derer, die in irgendeiner Form mit physikalischer Meß- und Experimentiertechnik zu tun haben. Vor allem aber der Student der letzten Semester, der vor apparative und experimentelle Aufgaben gestellt wird, findet in ihm eine Reihe wertvoller Hinweise und Anregungen, deren Inhalt er sich sonst in sehr mühevoller und langwieriger Arbeit aneignen müßte.

Wenn der Bearbeiter der deutschen Ausgabe in seinem Vorwort sagt, daß in diesem Buch eine sehr wesentliche Vorstufe zu spezielleren Werken, etwa dem sehr viel verwendeten Werk von KOHLRAUSCH, „Praktische Physik" geschaffen wurde, so kann das nur voll unterstrichen werden.

Der Stoff gliedert sich in die wesentlichsten Gebiete experimentellen Arbeitens, wobei etwa der Ausdruck „Experimentelle Physik" ganz bewußt vermieden wird. Denn bis auf das letzte Kapitel, welches Arbeitsverfahren der Kernphysik enthält, ist die Physik auch nur eines jener Gebiete, wo die angeführten Arbeitsmethoden, wenn auch in gesteigertem Maß, zur Anwendung gelangen. Die Aufgliederung des Inhalts erfolgt in neun Abschnitte. Ein Abschnitt über Fehler und Weiterbehandlung von Versuchsergebnissen liefert das nötige Rüstzeug zur entsprechenden Auswertung von Meßergebnissen. Daran schließt sich ein Kapitel, welches wichtige Grundlagen für einen sachgemäßen mechanischen Aufbau von Versuchsanordnungen und Geräten liefert. Ebenso finden die beim Bau physikalischer Apparaturen zur Verwendung gelangenden Werkstoffe eine verhältnismäßig eingehende Behandlung. An einem Abschnitt mit dem für das Arbeiten mit Hochvakuum unerläßlichen Grundlagen schließt sich ein Überblick über elektrische Meßverfahren und die am häufigsten verwendeten elektronischen Geräte (Verstärker, Oszillatoren, Multivibratoren) und ihre Arbeitsweise. Die letzten Kapitel befassen sich mit optischen und photographischen Fragen, mit den natürlichen Grenzen der Messungen (etwa BROWNSche Bewegung, thermisches Rauschen von Stromkreisen) und einige Arbeitsverfahren der Kernphysik.

Außerdem ermöglicht ein anschließendes Literaturverzeichnis nach Bedarf ein Eingehen auf speziellere Probleme, so daß das Buch im ganzen als einführendes Hilfsmittel in die Technik physikalischen Messens sehr gut geeignet erscheint.

N. PUCKER, Graz

Cosmos Electrodynamics. Von J. W. DUNGEY. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) IX, 183 S. Cambridge: At the University Press. 1958. £ —/32/6.

Durch die Anstrengungen auf dem Gebiete kontrollierter thermonuklearer Reaktionen ist das Interesse am Thema dieser Monographie in weitere Kreise gedrungen. Während in dem Buch von SPITZER vor allem die physikalischen Grundlagen ohne direkte Bezugnahme auf die Geometrie kosmischer Anwendungen bietet, stellt sich das vorliegende Werk die Aufgabe, die Besonderheiten dieser An-

wendungen in ihren theoretischen Grundlagen zu behandeln. Es gibt einen Überblick über die theoretischen Ansätze und liefert eine sehr gute Einführung in das Thema. Trotz des theoretischen Charakters nehmen die Rechnungen keineswegs die Überhand über den erklärenden Text, schon deswegen, weil wegen der Kompliziertheit der Probleme eine detaillierte quantitative Behandlung gar nicht möglich ist. Man kann nur sehr einfache Modelle behandeln und hoffen, daß sie einen wesentlichen Zug der Erscheinung treffen. In diesem Zusammenhang ist die Diskussion der Größenordnungen (Dimensionsbetrachtungen), mit der Effekte ins Spiel kommen, zusammen mit Tabellen über die einschlägigen Zehnerpotenzen sehr instruktiv. Der Stoff gliedert sich wie folgt: Einführung (16 S.), Die Methode der Geschwindigkeitsverteilung (30 S.), Die Bewegung magnetischer Felder (13 S.), Magnetostatik (20 S.), Magnetodynamik (30 S.), Beschleunigung geladener Teilchen auf hohe Energie (16 S.), Solare Phänomene (23 S.), Magnetische Stürme und Nordlichter (21 S.), Elektrodynamik der Ionosphäre (20 S.), Die Literatur (184 Zitate) ist bis August 1956 erfaßt. Das Werk ist als klare Einführung mittleren Umfanges ausgezeichnet geeignet. L. Breitenhuber, Graz

Introductory Nuclear Theory. Von L. R. B. Elton. Mit zahlreichen Textabb., XI, 286 S. London: Sir Isaac Pitman u. Sons Ltd. 40 s.

Die vorliegende Einführung in die Kerntheorie des bekannten Gelehrten, eignet sich ausgezeichnet für Studierende der Physik. Sie gliedert sich in zehn Abschnitte: Nach einer qualitativen Übersicht über die Kerne werden die allgemeinen Eigenschaften derselben besprochen. Daran schließt sich das Zweinukleonensystem bei niederen Energien und die Kernkräfte. Hierauf folgt eine Übersicht über die derzeit bekannten Kernmodelle und die wichtigsten Kernreaktionen. Dann behandelt der Verfasser den Kernphotoeffekt und die Wechselwirkung der Kerne mit dem elektromagnetischen Feld und schließlich wird als eigener Abschnitt der Beta-Zerfall und die Mesontheorie der Kernkräfte behandelt. Eine ausführliche Behandlung der Kernkonstante sowie ein allgemeiner Index beschließen das sehr empfehlenswerte Werk. Außerdem wäre aus der Fülle des Gebotenen noch einiges besonders hervorzuheben. So vor allem die sehr zweckmäßig gewählten Aufgaben, welche einer Vertiefung des Stoffes für den Lesenden dienen. Auch sei gesondert auf die sehr schöne Behandlung des Stoßes und der Multipolübergänge hingewiesen, welche wohl kaum klarer und übersichtlicher gemacht werden kann. Sehr übersichtliche Zeichnungen über die Lage der Vektoren, der Polarisation usw. erhöhen das Verständnis in jeder Hinsicht. Das Buch ist auch für den Lehrer aus theoretischer Physik eine wahre Fundgrube für die Abhaltung von Seminaren und Übungen. P. Urban, Graz

Theorie der thermischen Kernreaktoren. Von A. D. Galanin. Mit zahlreichen Abb., XII, 382 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1959. In Kunstleder gebunden DM 27.30.

Das vom Verfasser in russischer Sprache erschienene Buch liegt nun auch in deutscher Sprache auf. Wie der Titel verrät, wird die Berechnung thermischer Kernreaktoren behandelt.

Am Anfang werden Diffusion und Bremsung der Neutronen besprochen und die Lösung der Diffusions- und Altersgleichung in einigen Spezialfällen ermittelt. So wird die Bestimmung der Neutronendichte innerhalb und außerhalb der Uranblöcke durchgeführt und auf den schwierigen Fall hingewiesen, wenn Uran von gewöhnlichem Wasser umgeben ist. Bei der Besprechung der Alterstheorie werden einzeln die Bedingungen für die Anwendbarkeit derselben aufgezählt und besprochen.

Das nächste Kapitel bringt die Berechnungen für verschiedenförmige Reaktoren mit Hilfe eines effektiven Diffusionskoeffizienten (Eingruppentheorie). Dabei werden die einzelnen Fälle sowohl mit als auch ohne Reflektor behandelt.

Nun folgt in den Kapiteln III und IV die Anwendung der Rechnungen auf homogene und heterogene Reaktoren, dabei wurde die in den vorherigen Paragraphen abgeleitete Integralgleichung für die Neutronendichte durch die entsprechenden Differentialgleichungen ersetzt und für die Alterstheorie eine Näherung (Zweigruppentheorie) verwendet. Für heterogene Reaktoren müssen andere Werte für den Multiplikationsfaktor, sowie der Diffusions- und Bremslänge eingeführt werden, damit der Mittelwert der Neutronendichte die Gleichung für homogene Anlagen befriedigt.

Anschließend wird die exakte Theorie für die Berechnung der kritischen Dimensionen, die Methode der effektiven Randbedingungen und die Ansätze für die Ermittlung der kritischen Daten eines mittelschnellen Reaktors dargelegt.

Die nächsten Kapitel sind der Anwendung der Störungstheorie bei schwach oder stark absorbierenden Stoffen im Reaktorkern oder Reflektor und der zeitlichen Änderung des Isotopengehaltes durch Vergiftung, Verschlackung und Ausbrand gewidmet, wobei gleichzeitig der Einfluß der neu entstehenden Isotope für die in der Praxis auftretenden Fälle einzeln behandelt wird. Abschließend werden der Einfluß der verzögerten Neutronen auf die Kinetik, sowie jener der Temperatur und des Regelsystems auf die Reaktivität genau besprochen.

Der zweite Teil enthält spezielle Probleme. Man findet Transportgleichung mit nur einer Geschwindigkeit, Abweichung von der Diffusionstheorie, Neutronenspektrum bei thermischen Energien, Resonanzabsorption und numerische Berechnungen.

Dem Praktiker ist dieses Buch wärmstens zu empfehlen, da er sich in dem übersichtlich angeordneten Stoff leicht zurecht finden kann, aber nicht nur als Nachschlagswerk, sondern auch als Lehrbuch wird es gute Dienste leisten können.

H. Zingl, Graz

Wilhelm Conrad Röntgen und die Geschichte der Röntgenstrahlen. Von O. Glasser. Zweite Auflage. Mit 112 Abbildungen und 1 Porträt, XI, 381 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 58.—.

Die große Entdeckung Röntgens verdient es ohne Zweifel, in einer eigenen Monographie behandelt zu werden. Angesichts der kaum mehr zu überblickenden Anwendungen der Röntgenstrahlen in Wissenschaft, Medizin und Technik dürfte die vorliegende historische Darstellung mit einem großen Interessentenkreis rechnen. Der Inhalt des Buches ist aber enger, als der Titel erwarten läßt. Es werden nämlich im wesentlichen nur die Entdeckung selbst und die weitere Entwicklung im darauf folgenden Jahr 1896 behandelt, während der Lebensweg Röntgens eine vollständige Darstellung erfährt. Die Entdeckungsgeschichte ist mit einer Ausführlichkeit dargelegt, die den Eindruck größter wissenschaftlicher Gewissenhaftigkeit macht und inhaltlich nichts zu wünschen übrig läßt. Besonderen Dank wird der Leser für den Abdruck der Originalmitteilungen Röntgens wissen, die tatsächlich mehr über die Gedanken des Entdeckers sagen, als noch so langatmige Erörterungen könnten. Aber auch die Reaktion der Zeitgenossen kommt in Zeugnissen der Anerkennung und Bewunderung, übertriebener Hoffnungen und Befürchtungen (teilweise in humoristischer Form) zum Ausdruck.

Bei wissenschaftlichen Abhandlungen gilt mit Recht eine sachliche, auf das rein Faktische beschränkte Darstellung als Vorzug; bei biographischen und historischen Werken aber darf man auch Lebendigkeit und Bildhaftigkeit des Stils fordern. Leider wird der Leser in dieser Hinsicht enttäuscht. Das Faszinierende

an Röntgens Entdeckung wird bei der Akribie der Darstellung nicht unmittelbar gegenwärtig. Das Buch erhebt sich nicht über den rein sachlichen Ton einer wissenschaftlichen Abhandlung. Eine Ausnahme macht nur ein eingeschobener Beitrag von Margret Boveri, in dem die persönliche Bekanntschaft der Verfasserin mit der Familie Röntgen recht lebendig geschildert wird.

Die Ausstattung des Buches, vor allem auch mit Abbildungen ist vorzüglich.

G. Porod, Graz

Chemische Reaktionen in Stoßwellen. Von E. F. Greene und J. P. Toennies. Übersetzt von H. G. Wagner. (Fortschritte der Physikalischen Chemie: Band 3.) Mit 85 Abbildungen in 102 Einzeldarstellungen und 15 Tabellen. XV, 202 S. Darmstadt: Steinkopff-Verlag. 1959. Kart. DM 25.—.

Diese von H. Ulich angeregte Sammlung mit dem Ziele, den heutigen Stand verschiedener moderner Zweige der Physikalischen Chemie darzustellen, ist sehr zu begrüßen, da der Physiker, der sich über Nachbargebiete informieren möchte, kaum Zeit findet, mehrere chemische Zeitschriften zu lesen. Handbücher haben leider oft das Schicksal, bei ihrem Erscheinen veraltet zu sein. Der vorliegende (von W. Jost angeregte) Band stellt sich die Aufgabe, die Theorie der Stoßwellen, die experimentellen Methoden ihrer Erzeugung und Untersuchung, sowie die eigentlichen chemischen Anwendungen vom modernen Standpunkt darzustellen. Die Literatur konnte bis Sommer 1957 berücksichtigt werden. Das Buch enthält überwiegend Physik, da erst das letzte Kapitel sich mit den eigentlichen chemischen Anwendungen befaßt.

Nach einem einleitenden Kapitel über den Vergleich der Stoßwellenmethode mit anderen Verfahren (wie etwa der Ultraschall), wird die hydrodynamische Theorie der Stoßwellenausbreitung in einem idealen Gas mit konstanten spezifischen Wärmen, die Erweiterung auf reale Gase, und die Theorie der Stoßfront behandelt. Das vierte und fünfte Kapitel beschreibt die Erzeugung von Stoßwellen und die schwierigere und kostspieligere Messung der Stoßwellendaten. Das Schlußkapitel berichtet über die wichtigsten chemischen, bzw. physikalischen Anwendungen, wie Gleichgewichtsdaten, Spektren von Gasen bei hohen Temperaturen und Reaktionsgeschwindigkeiten. Am Schluß dieses Kapitels gibt eine 16 Seiten lange tabellarische Übersicht einen ausgezeichneten Überblick über das bisher Erreichte.

Die Darstellung ist prägnant und leicht lesbar. Die theoretischen Ableitungen sind auf das Notwendige beschränkt worden. Die Monographie gibt einen ausgezeichneten Einblick in dieses moderne Forschungsmittel.

L. Breitenhuber, Graz

Grimsehl: Lehrbuch der Physik. Vierter Band: Struktur der Materie. Zwölfte Auflage. Herausgegeben von W. Schallreuter. Mit 495 Abbildungen im Text. XX, 699 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1959. Ganzleinen DM 25.20.

Bereits vor 10 Jahren wurde eine Neuaufteilung des Stoffes in den Grimsehlbänden insofern durchgeführt, als jene Teile, die die Atom- und Molekülphysik betreffen, aus den bisherigen 3 Bänden entfernt wurden, um in einem eigenen Band zusammengezogen zu werden.

Dieser 4. Band liegt nun vor und wurde von einer Gruppe von neun Autoren zur Gänze neu bearbeitet. Dabei ging natürlich der Charakter eines Lehrbuches etwas verloren, da Überschneidungen im Stoff und eine Disharmonie in der Bezeichnungsweise in der kurzen Zeit nicht zu vermeiden waren. Wie aber der Herausgeber im Vorwort betont, werden diese Mängel bis zur nächsten Auflage beseitigt.

Zur Anordnung des Stoffes selbst ist etwas mehr zu bemerken. Das erste Drittel allein ist der Kernphysik gewidmet, wobei Beschleunigungsmaschinen

und Elementarteilchen einbezogen wurden. Erst dann folgt die elementare Quantenmechanik und Atomphysik. Daran schließt sich die Molekülphysik, die Physik der Flüssigkeiten und die Festkörperphysik. Den Abschluß bildet etwas Astrophysik. Man muß den Herausgebern recht geben, wenn sie behaupten, daß die Kernphysik heute der wichtigste und meist benötigste Teil der modernen Physik ist und daß es daher eine Berechtigung hat, dieses Gebiet an die Spitze zu stellen. Trotzdem wird diese Anordnung eine heftige Diskussion auslösen, z. B. dadurch, daß über den Kernphotoeffekt Seite 41 gesprochen wird, während der normale (äußere) Photoeffekt erst Seite 638 erklärt wird, oder daß die Gammastrahlung Seite 177 und die Atomspektren erst Seite 271 behandelt werden. Die Elementarteilchen findet man Seite 111, aber auch zwischen Seite 214 und 226, dabei wird die Existenz gewisser Antiteilchen angenommen ohne auf die DIRAC'sche Theorie hinzuweisen. Diese Theorie aber wurde nicht erläutert, obwohl sie in der Molekülphysik Seite 412 vorausgesetzt wird.

Die Fülle des verarbeiteten Stoffes verursachte natürlich die vorhin erwähnten Schönheitsfehler, bei einer weiteren Auflage dürfte man aber bereits wieder einem geschlossenen Werk gegenüberstehen, daß sowohl als Lehrbuch als auch als Nachschlagswerk an den Ruf des altbewährten „Grimsehl" anknüpft und die derzeitigen Lehrbücher der Physik in den Schatten stellt, denn es behandelt ausführlich sowohl die klassische (Band I—III) als auch die Quantenphysik, wobei letzterer mehr als 30 Prozent des Werkes gewidmet sind. Damit werden diese Bücher den heute gestellten Anforderungen vollauf gerecht.

Druck und Ausstattung ist wie bei allen Grimsehlbänden vorbildlich und übersichtlich.

H. ZINGL, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band III/Teil 2: Prinzipien der Thermodynamik und Statistik. Mit 25 Figuren, VII, 678 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 160.—. (Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches Subskriptionspreis Gln. DM 128.—.)

Der Band III/2 des Handbuches der Physik ist den Prinzipien der Thermodynamik und Statistik gewidmet und umfaßt fünf große Artikel. Der erste behandelt sowohl die klassische als auch die statistische Thermodynamik und wurde von dem bekannten Thermodynamiker E. A. GUGGENHEIM verfaßt. Nach einer sehr konzentrierten Übersicht über die Grundlagen der klassischen Thermodynamik werden ihre Anwendungen erörtert. Hier kann besonders auf die schöne Behandlung der Gasgemische und der DUHEM-MARGULESschen Relation hingewiesen werden. Dann folgt die Grundlegung der statistischen Mechanik in Anlehnung an das bekannte Werk von TOLMAN. Hier findet man Verteilungsfunktionen der FERMI-, DIRAC-, der BOSE-, EINSTEIN- sowie der klassischen BOLTZMANN-Statistik und die grundlegenden Beziehungen für das chemische Gleichgewicht. Nach Bereitstellung der fundamentalen Beziehungen der statistischen Mechanik und ihre Anwendung von Molekülen wird die statistische Thermodynamik behandelt. Die MAXWELLsche Geschwindigkeitsverteilung, sowie die Rotation molarer Moleküle nebst ihren Anwendungen werden in sehr übersichtlicher Weise dargestellt. Auch die idealen Gasgemische, sowie die Behandlung des einfachen Kristalls und die Beziehungen zwischen Gas und Kristall sind nicht übersehen worden. Daß an dieser Stelle auch die Entropiewerte für die verschiedenen Freiheitsgrade behandelt werden und das Massenwirkungsgesetz in seinen verschiedenen Formen, ist selbstverständlich. Den Abschluß bildet eine Behandlung der Entartung idealer Gase und die Strahlung, sowie die äußeren Felder. In einem sehr schönen historischen Anhang wird nicht allein auf die Entwicklung

der Begriffe der Thermodynamik eingegangen, sondern auch gleichzeitig das wichtigste Schrifttum zusammengefaßt.

Der zweite Artikel behandelt die Axiomatik der Thermodynamik und stammt von G. Falk und H. Jung. Die Verfasser stützen sich in ihren Ausführungen, wie sie selbst in ihrer Einleitung anmerken, hauptsächlich auf die grundlegenden Arbeiten von Carathéodory und Gibbs. Dieser Artikel zeichnet sich durch seinen logischen Aufbau und seine klare Diktion besonders aus. Ist doch das bearbeitete Gebiet von großer Abstraktheit und stellt an den Leser hohe Anforderungen. Wichtige Begriffe, wie Entropie und Temperatur werden in ihrem Verhältnis zueinander herausgearbeitet und ihre Stellung in bezug auf andere grundlegende Begriffe der Thermodynamik neu festgelegt. Außerdem werden die Begriffe „adiabatisch" und „quasistatisch" genauestens erörtert, welche bekanntlich in allen thermodynamischen Darstellungen eine wesentliche Rolle spielen. Die Verfasser führen die Aufstellung der thermodynamischen Variablen auf zwei Operationen zurück, die sie als System-Zusammensetzung und System-Reduktion bezeichnen. Außerdem wird der Stetigkeitsbegriff z. B. die Kontinuierlichkeit physikalischer Variabler als rein mathematische Zusatzforderung eingeführt, im Gegensatz zur üblichen Behandlung dieses Problems. Hierdurch wird einer mehr physikalischen Behandlung das Tor geöffnet und die für die Thermodynamik so charakteristischen kombinatorischen Betrachtungen in den Mittelpunkt des Interesses gestellt. Ein eigener Anhang behandelt die berühmten Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik „von Carathéodory" in der Terminologie der Verfasser.

Der dritte Abschnitt behandelt die Prinzipen der statistischen Mechanik und stammt von A. Münster. Aus der Fülle des gebrachten Stoffes sei besonders auf die Behandlung des Ergodenproblems hingewiesen, die dem heutigen Stand angepaßt wurde. Hier findet man die ganze historische Entwicklung dieses Begriffes mit allen seinen mathematischen Schwierigkeiten in schöner und klarer Form dargestellt. Speziell die Neumannschen und Birkhoffschen Sätze werden, in einzelne Theoreme gegliedert, dargestellt. Daran schließt sich das Problem der metrischen Transitivität, welche in drei Teilfragen behandelt wird, und nach moderner Auffassung die alte „Quasi-Ergodenhypothese" ersetzt. Auch der fermische Satz über kanonische Normalsysteme wird hier erörtert, sowie die Theorie des repräsentativen Ensembles.

Der vierte Artikel der Thermodynamik irreversibler Prozesse wurde von J. Meixner und H. G. Reik verfaßt. Nach einer kurzen Vorbemerkung behandeln die Verfasser die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in kontinuierlichen Medien mit inneren Umwandlungen, dasselbe für fluide Medien. Hier sei vor allem auf die schöne Behandlung der elektrochemischen, thermoelektrischen und anderen Effekte hingewiesen, sowie auf die Transportphänomene als Relaxationserscheinungen.

Den Abschluß bildet eine Übersicht über die relativistische Thermodynamik sowie über die statistische Thermodynamik der irreversiblen Prozesse.

Der letzte Abschnitt von A. Ramakrishnan befaßt sich mit der Wahrscheinlichkeit und mit stochastischen Prozessen, ein Gebiet, welches bisher eigentlich nur der Mathematik vorbehalten war, nunmehr aber auch für den Physiker von Bedeutung geworden ist. Das Hauptverdienst des Verfassers ist darin zu suchen, daß er es unternommen hat, dieses sonst in der mathematischen Literatur sehr abstrakt gebrachte Gebiet in einer für den Physiker verständlichen Weise dargestellt zu haben, ohne an Strenge einzubüßen. Der moderne Physiker braucht vielfach Sätze aus diesem Gebiet und ist nicht immer in der Lage alle mathematischen Details in extenso zu studieren. Es werden übrigens in diesem Artikel einige Bei-

spiele dieser Art eingeführt, wie z. B. im Abschnitt B/IV. Hier sei besonders auf das Kaskadenproblem der kosmischen Strahlung hingewiesen, welches bekanntlich von großer Bedeutung ist. Aber auch in der Astrophysik spielen stochastische Probleme heutzutage eine wichtige Rolle.

Im Abschluß werden auch einige Anwendungen auf die Quantenmechanik behandelt. Im ganzen gesehen, kann der Versuch als gelungen bezeichnet werden, dieses schwierige mathematische Gebiet dem Physiker erschlossen zu haben.

P. Urban, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. Flügge. Band XXXVIII/2: Neutronen und verwandte Gammastrahlprobleme. Mit 338 Figuren, VI, 868 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 178.—. (Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches Subskriptionspreis DM 142.40.)

Band 38/2 des Handbuches der Physik ist den Neutronen und verwandten Gammastrahlproblemen gewidmet und umfaßt zwei Artikeln. Der erste wurde von E. Amaldi verfaßt und behandelt in sehr ausführlicher Weise die Erzeugung und Abbremsung von Neutronen. Seit der Entwicklung des Neutrons durch Chadwick im Jahre 1932 hat sich die Neutronenphysik zu einem sehr wichtigen Teil der Kernphysik entwickelt. Der Verfasser gibt in seiner Einleitung A einen sehr ausführlichen Überblick über die historische Entwicklung. Er skizziert alle Grundphänomene in übersichtlicher Weise, welche in den darauf folgenden vier Abschnitten im Detail behandelt werden. Der Artikel erörtert vorwiegend den Stoff vom experimentellen Standpunkt aus und kann als eine allgemeine Einführung in die einzelnen Zweige der Neutronenphysik betrachtet werden.

Teil B ist den Reaktionen gewidmet, welche Neutronen emitieren. Er bringt die Anwendung der Erhaltungssätze auf Kernreaktionen, dann die verschiedenen Kernreaktionen und die zwei natürlichen Neutronenquellen: Die kosmische Strahlung und die spontane Kernspaltung. Aus der Fülle des Gebotenen sei besonders auf die schöne Behandlung des Neutron-Photoeffekts hingewiesen, welche auch in theoretischer Hinsicht nichts zu wünschen übrig läßt.

Abschnitt C ist der Abbremsung von Neutronen mit einer Energie größer als einige eV gewidmet. Hier findet man die allgemeinen Prinzipien für dieses so wichtige Problem und hat in einem kurzen Abriß über die elementare Behandlung desselben sehr eingehend die räumliche Verteilung der Neutronen in einem Medium als Funktion der Energie und ausführliche Resultate experimenteller Messungen.

Der Abschnitt D behandelt dann die Abbremsung und Diffusion von Neutronen im chemischen Bereich, also von sehr langsamen Neutronen.

Der letzte Abschnitt E ist der Diffusion thermischer Neutronen gewidmet und stellt ein Grundproblem des Reaktors an sich dar. Der Verfasser behandelt sowohl die allgemeinen Züge der Diffusionstheorie als auch die strenge Lösung des Problems in einem homogenen quellenfreien Medium und gibt eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie. Einige sehr übersichtliche Meßergebnisse erhöhen das Eindringen in das Verständnis dieser komplizierten Vorgänge. Auch die Absorption thermischer Neutronen und ihre Feststellung wird vom neuesten Gesichtspunkt aus betrachtet. Eine ausführliche Literaturübersicht gestattet dem Leser das eine oder andere Problem im speziellen zu verfolgen.

Der zweite Artikel über die Durchdringung und Diffusion von Röntgenstrahlen stammt von den Verfassern Fano, Spencer und Berger. Der vorliegende Artikel befaßt sich besonders mit der Eindringung von Röntgenstrahlen unter Bedingungen, in welchen die Photonen mehrfach Comptonstreuung erleiden, bevor sie absorbiert werden. Gerade dieser Fall wurde in den letzten Jahren systematisch untersucht,

im Hinblick auf das Problem der Verteilung in der Materie. Die Ergebnisse dieser Studien haben zahlreiche Anwendungen in der Radiologie gefunden, aber auch die Technik und Kernphysik, besonders im Hinblick auf die Reaktortheorie, hat dadurch eine größere Förderung erfahren. Die Verfasser behandeln die Materie als eine amorphe Ansammlung von Atomen und lassen die kohärente Streuung an Kristallgittern außer acht. Zuerst wird eine Übersicht über die Elementarprozesse gegeben, dann folgt die allgemeine Theorie. Hierbei werden einfache Quellfunktionen zugrundegelegt und die theoretischen Rechenmethoden, insbesondere die Iteration ausführlich erörtert. So findet man beispielsweise hier eine sehr übersichtliche Darstellung der Geometrie der doppelten Comptonstreuung, die FOURIER-LEGENDRE-Transformation sowie eine Abschätzung der Eindringtiefe, die mit dem Experiment verglichen wird.

Die letzten drei Abschnitte befassen sich mit der Berechnung der Fluxverteilung im unendlich homogenen Medium, die Einflüsse der Begrenzung und Inhomogenitäten, sowie die experimentellen Gesichtspunkte, welche die Theorie in ihrer Anwendung begrenzen. Auch dieser Artikel wird durch eine sehr ausführliche Literaturübersicht abgeschlossen. P. URBAN, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band LIII. Astrophysik IV; Sternsysteme. Mit 160 Figuren, VIII. 565 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 142.—, Subskriptionspreis Gln. DM 113.60.

Der vorliegende Band des FLÜGGE'schen Handbuches behandelt unser Wissen von den Sternsystemen, d. h. den Sternhaufen, unserem Milchstraßensystem, den außergalaktischen Systemen und den Gruppen und Haufen solcher.

In einem ersten Beitrag von 20 Seiten gibt EDMONDSON die kinematischen Grundlagen für die Sternbewegungen in unserem Milchstraßensystem. Es handelt sich dabei darum, aus bestimmten Vorstellungen über die Rotation unseres Sternsystems, an welchem das Sonnensystem natürlich teilnimmt, jene Parameter aus statistisch beobachtbaren Größen zu bestimmen, welche die Rotation definieren. Ein einwandfreier Satz solcher Parameter ist gegenwärtig noch nicht angebbar und es wird gezeigt, durch welche künftigen Beobachtungen er gewonnen werden kann.

Der nächste Artikel von LINDBLAD behandelt auf 79 Seiten die Dynamik unseres Sternsystems. Unter Annahme bestimmter einfacher Modelle für die Sternverteilung, Geschwindigkeitsverteilung und Potentialfunktionen, werden mögliche, stationäre oder nicht-stationäre scheinbare Geschwindigkeitsverteilungen in der Sonnenumgebung berechnet, die mit den Beobachtungen verglichen werden können. Die Beobachtungen bestehen aus Eigenbewegungen, Radialgeschwindigkeiten und den Linienprofilen der Wasserstofflinie von 21 cm Wellenlänge. Sodann wird versucht, umgekehrt aus den Beobachtungsdaten Aufschlüsse über die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne und ihre möglichen zeitlichen Änderungen zu erhalten. In einem Schlußkapitel wird die Theorie einer Spiralstruktur behandelt, deren Feststellung hauptsächlich aus radioastronomischen Beobachtungen erfolgen kann.

OORT stellt in einem Beitrag von 29 Seiten die radioastronomischen Studien der galaktischen Struktur und ihre Ergebnisse dar. Die Methode ist nicht hypothesenfrei, weil Daten über die galaktische Rotation verwendet werden müssen, die, wie oben erwähnt, noch nicht mit aller Sicherheit bekannt sind. Trotzdem ist in der kurzen Zeit seit der Entwicklung dieses Zweiges astronomischer Forschung und unter wesentlicher Mitwirkung des Verfassers eine Fülle von Einzelheiten über die Struktur der Wasserstoffwolken in unserem Sternsystem festgestellt worden, die auf anderem Wege nicht erreichbar sind.

Auf 79 Seiten berichtet Frau Hogg über Sternhaufen, deren Studium wir bekanntlich besonders viele Aufschlüsse der verschiedensten Art verdanken. In übersichtlicher Weise und mit ausgezeichneten Illustrationen wird zunächst über galaktische, sodann über Kugelhaufen berichtet. Zwei Kataloge für beide Arten von Sternhaufen geben einen wertvollen Abschluss dieses ebenso gründlichen wie gut lesbaren Beitrages, weil sie beide die neusten Untersuchungen berücksichtigen.

R. H. Brown gibt sodann auf 31 Seiten eine Übersicht über die diskreten Quellen kosmischer Radiowellen, von welchen derzeit gegen 2000 bekannt sind. Die nähere Untersuchung der intensivsten hat gezeigt, daß es sich dabei teils um galaktische Nebel handelt, möglicherweise um Überreste von Supernovis, teils um zusammenstoßende außergalaktische Sternsysteme. Auch spektrale Untersuchungen im radiofrequenten Gebiet sind für einige Quellen bereits angestellt worden, von welchen die wichtigsten einzeln beschrieben werden.

Von der Radiostrahlung außergalaktischer Systeme handelt der nächste Artikel von Mills. Hier wird auf 36 Seiten über die Strahlung normaler Galaxien berichtet, sowohl im Kontinuum als auch in der 21 cm-Linie des neutralen Wasserstoffes, während den sogenannten „Radiogalaxien", kollidierenden außergalaktischen Systemen mit ungleich intensiverer Strahlung ein eigener Abschnitt gewidmet ist. Beide Beiträge überschneiden sich teilweise und geben eine knappe und gute Übersicht über dieses junge und reizvolle Gebiet.

Die beiden nächsten Artikel stammen von Vaucouleurs (36 und 62 Seiten) und beschreiben die Klassifikation und das Aussehen der außergalaktischen Sternsysteme sowie ihre allgemein physikalischen Eigenschaften. Der erste Beitrag ist durch eine Fülle schöner Abbildungen illustriert. Die Erweiterung der Hubble'schen Klassen, die ausführlich beschrieben wird, läßt eine feinere Systematik zu, die aber bei Grenztypen oft unbestimmt wird. Im zweiten Beitrag wird auf die noch immer strittige Frage der Rotationsrichtung der Spiralen eingegangen. In der Figur Seite 343 wäre es für die anschauliche Vorstellung günstiger, die beiden Pfeile im obersten Teil (a) fortzulassen und nur durch V^+ und V^- das Vorzeichen der Radialgeschwindigkeit anzudeuten. Ebenso müßte bei c' die Spirale genau wie bei c aussehen und nur der Pfeil in der Richtung zur Erde nach oben zeigen. Der Anblick der Spirale darf sich doch bei den beiden möglichen Deutungen nicht ändern. Eine umfangreiche Bibliographie gibt eine Vorstellung von dem großen Interesse, das der Nebelforschung gewidmet wird.

Von vielfachen Galaxien und Nebelhaufen (17 bzw. 26 Seiten) handeln zwei Artikel von Zwicky. In schönen Reproduktionen werden viele Beispiele von solchen physisch verbundenen Systemen aufgezeigt, die teils „koexistieren", teils deutlich getrennt, aber durch Materiefäden miteinander verbunden sind. Auf die Wichtigkeit der Untersuchungen doppelter und mehrfacher Systeme zu ihrer Massenbestimmung wird hingewiesen. Nach Zwicky scheint es, daß die Haufenbildung bei anagalaktischen Systemen der Normalfall ist, die sogenannten Feldnebel hingegen in der Minderheit sind. Die Methoden der dimensionslosen Morphologie werden vom Verfasser eingehend geschildert. Die meisten Leser wird es wohl eigenartig berühren, daß ein Teil der Rotverschiebung unbedenklich als Geschwindigkeitsdispersion innerhalb des Nebelhaufens gedeutet wird, der größere Rest aber immer als „symbolische, scheinbare Rezessionsgeschwindigkeit" angesprochen wird. Seite 408 soll in der Formel (12,2) der Exponent 3 hinter der eckigen Klammer stehen. Die an die Figur 5 geknüpften Schlüsse auf Seite 409 werden wohl kaum jemand überzeugen können.

Von Neyman und Scott (29 Seiten) wird die Großraumverteilung der Galaxien beschrieben. Eine Zufallstheorie einer solchen hat keinen deutbaren physikalischen

Hintergrund, zumindest ist er nicht angegeben. Die Autoren sind sich aller Schwierigkeiten, die im Beobachtungsmaterial stecken, voll bewußt und ihre Darstellung ist, abgesehen von den Grundlagen der Theorie, durchaus kritisch.

McVittie berichtet über die Beobachtungsdaten, die der Entfernungs- und Zeitmessung in der Kosmologie zugrundeliegen (44 Seiten). Bei nicht-euklidischer Metrik des Raumes ist zwischen verschiedenen Distanzbegriffen zu unterscheiden: Distanz aus Leuchtkräften, aus scheinbaren Durchmessern der Objekte und aus künftigen scheinbaren Durchmessern. Die Distanzmessungen werden kritisch analysiert und gezeigt, mit welchen Unsicherheiten die derzeitigen Bestimmungen noch behaftet sind. Auch die Hubble'sche Konstante und die Beschleunigungskonstante der Rezession werden kritisch geprüft und ihr möglicher Spielraum angegeben. Ebenso wird in sehr klaren Überlegungen gezeigt, in wie weiten Grenzen das Weltalter festgesetzt werden kann, je nachdem, welche besondere Annahmen man über die zeitliche Abhängigkeit der Expansion macht.

Die zwei letzten Beiträge von Heckmann und Schücking, die einzigen in deutscher Sprache, handeln von der Newton'schen und Einstein'schen Kosmologie bzw. von anderen kosmologischen Theorien (31 und 18 Seiten). Die Rechtfertigung der Kosmologie vom Standpunkt der Feldphysik aus gegenüber skeptischen Einstellungen erscheint Ref. etwas weit hergeholt. Ist die Struktur des Universums als Ganzes nicht interessant genug, um kosmologische Überlegungen und Theorien zu rechtfertigen? Freilich zeigen die Ausführungen des Beitrages von McVittie, daß die Beobachtungen nur sehr karge Auskunft geben für die Auswahl des passenden Weltmodells aus einer großen Vielfalt möglicher von den beiden Autoren dargestellter Modelle. Man kann vermuten, daß dieser Zustand sich auch in absehbarer Zukunft kaum ändern wird. Trotzdem wird die Kosmologie immer ein reizvolles Kapitel bleiben und eine mächtige Triebfeder für die Ausdehnung der Grenzen des überschaubaren Universums.

Die Ausstattung des Buches ist wieder vorzüglich, der Umfang der einzelnen Beiträge sorgfältig abgewogen. Man muß dem ausgezeichneten Werk einen großen Leserkreis wünschen.

O. Mathias, Graz

Hypersonic Flow Theory. Von W. D. Hayes und R. F. Probstein. [Applied Mathematics and Mechanics: Vol. 5.] Mit zahlreichen Textabb., XV, 464 S. New York-London: Academic Press Inc., Publishers. 1959. Geb. $ 11.50.

Der fünfte Band der Sammlung „Angewandte Mathematik und Mechanik" ist der Theorie der Überschallgeschwindigkeit gewidmet. Dieses neue Fachgebiet ist durch die rasche Entwicklung des Flugwesens bedingt, welche zur Herstellung von Flugzeugen geführt hat, welche mit Überschallgeschwindigkeit fliegen. Zahlreiche große Unternehmungen der Flugzeugindustrie haben ihre Unterlagen zur Herausgabe dieses interessanten Werkes zur Verfügung gestellt. Nach allgemeinen Betrachtungen über die heute notwendigen Annahmen zur Durchfuhrung einer widerspruchsfreien Theorie des Überschallfluges wird eine Störungstheorie für kleine Abstände entwickelt. Daran schließt sich eine historische Übersicht über die Gas-Dynamik Newtons, welche so recht die Universalität dieses großen Mannes zeigt. Zweidimensionale und axialsymmetrische Körper werden auf Grund der Newtons Theorie behandelt und die optimalen Formen ermittelt. Im Abschnitt 4 erörterten die Verfasser Lösungen konstanter Dichte, im Abschnitt 5 die Theorie dünner Stoßdichten. Aus der Fülle des Gebotenen sei noch besonders der zähe Fluß und die zähen Wechselwirkungen, sowie das Verhalten der freien Moleküle im Gasfluß erwähnt. Ein sehr ausführliches Literatur- und Autorenverzeichnis beschließt dieses sehr lesenswerte Werk.

P. Urban, Graz

Praxis der Mikrophotographie. Von H.-H. Heunert. Zweite Auflage. Mit 80 Textabb. in 120 Einzeldarstellungen. VIII, 96 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 19.80.

Die soeben erschienene 2. Auflage dieses viel benützten Buches für den Praktiker ist vom Verfasser völlig neu bearbeitet und ergänzt worden. Nicht nur eine neue Einteilung des Stoffes fällt ins Auge, sondern vor allem die Erweiterung durch Kapitel über Fluoreszenzmikroskopie und Farbenphotographie, sowie übersichtliche Tabellen vervollständigen das Werk.

Die beschriebenen Mikroskopeinrichtungen sind neben den Erzeugnissen der Firmen Leitz und Zeiß nun auch auf solche der Reichert-Werke-Wien ergänzt worden, was vor allem der österreichische Mikroskopiker begrüßen wird, der ja viel mit heimischen Geräten arbeitet.

Das Kapitel „Makrophotographische Aufnahme" ist in der zweiten Auflage in Anbetracht der Herausgabe des Buches „Die Nahaufnahme" von H.-H. Heunert entfallen; an Stelle dessen wurde ein ausführliches alphabetisches Sachregister neu aufgenommen. K. Oroszy, Graz

Amerikanische und deutsche Psychologie. Eine vergleichende Darstellung. Von B. Holzner. 406 S. Würzburg: Holzner-Verlag. 1958. DM 28.—.

Der Autor versucht mit dieser „Studie moderner psychologischer Theorien in Deutschland und Amerika", die die Veröffentlichung seiner Bonner Dissertation darstellt, „ein besseres Verständnis der verschiedenen Standpunkte mitzubereiten" (S. 15). Eine vergleichende Analyse also, die darüber hinaus den deutschsprachigen Leser in Methodik und Thematik der amerikanischen Richtungen einführen soll.

Der erste Hauptteil, „Wissenschaftstheorien, Methoden und ihre Konsequenzen", ist einer eingehenden Diskussion des Begriffes „Wissenschaft" gewidmet. Hier zeichnet sich bereits das im folgenden zweiten Abschnitt noch weiter ausgeführte polare Gliederungsschema ab: Der Operationismus mit seinen rigorosen Forderungen nach „Wissenschaftlichkeit", spricht, weitestgehender Voraussetzungslosigkeit, nach operationaler Definition des verwendeten Begriffsapparates und intersubjektiver Verifizierbarkeit der Aussagen auf der einen, G. W. Allport als Wortführer der für „Gegenstandsadäquanz" Eintretenden „dynamischen" Richtungen auf der anderen Seite. Als extremster, „subjektivistischer" Vertreter dieser besonders in Deutschland verbreiteten Haltung wird Klages mit seiner Betonung der Intuition, der Schau als Methode der Seelenforschung genannt.

Holzner selbst versucht einen Mittelweg, indem er die methodologischen Forderungen der Operationisten, besonders dort, wo es sich um die Einführung exakter Sicherungs- und Verifizierungsverfahren handelt, unterstützt, sie aber sinnvoll, dem untersuchten Bereich entsprechend angewandt wissen will. Die Betonung des strukturellen Aspektes eröffnet schließlich den Zugang zu einer ganzheitlich-anthropologischen Zusammenschau.

Der folgende, die „Frage nach dem Menschenbild" umfassende Teil wiederholt im wesentlichen die G. W. Allportsche Rückführung der anglo-amerikanischen Psychologien auf die Lockesche, der „kontinentalen" Theorien auf die Leibnizsche Tradition. Passivität, „Bestimmung von außen", Assoziationismus kennzeichnen die erstere, Selbst-Aktivität und innere Dynamik die letztere.

Das Kernstück des Buches bildet die Abhandlung der *Persönlichkeitstheorien* in ihrer Entwicklung aus den hier nur kurz angedeuteten grundlegenden Ansätzen. Ein historischer Rückblick sucht die Wurzeln der Lehre von der Persönlichkeit im deutschen Sprachraum und in England, bzw. in Amerika auf.

In der Erörterung der heute vertretenen Persönlichkeitstheorien kommt es ihm in erster Linie auf die Herausarbeitung der zugrundeliegenden „Denkmodelle"

an. Holzner ordnet sich sein Material nach fünf „Gesichtspunkten", von welchen zwei, der „typologische" und der „funktionelle" Gesichtspunkt, ausführlicher zur Darstellung gelangen.

Der erstere, besonders in Deutschland beliebte Ansatz, wird in seinen bedeutendsten Vertretern besprochen und auf ein gemeinsames Menschenbild zurückgeführt, die Tendenz nämlich, den Menschen als „ein vereinzeltes Wesen" zu sehen, „dessen Struktur weitgehend vorgegeben ist" (S. 203).

Im Gegensatz dazu bemühen sich die (angelsächsischen) Anhänger der unter dem Schlagwort „funktioneller Gesichtspunkt" zusammengefaßten Theorien um eine Erklärung des menschlichen Verhaltens als Reaktion auf Beeinflussungen „von außen". Nach Holzner fallen hierunter sowohl die Reiz-Reaktionstheorien des Behaviorismus und Funktionalismus („Rattenmodell", mechanistisches Modell), als auch die sozialen Persönlichkeitstheorien („Rollenmodell", Mikrosoziologie) und die amerikanische Neopsychoanalyse. Ihrer Erörterung ist im Einklang mit der informatorischen Absicht des Buches ein breiter Raum gewidmet.

Der Abschnitt „Lerntheorien und der moderne Behaviorismus" orientiert sich dabei vorwiegend an E. R. Hilgards ausgezeichneter Darstellung in seinem Buch „Theories of Learning". Als Repräsentanten des sozialpsychologischen Ansatzes bringt der Autor eine eingehende Darstellung der Auffassungen von G. H. Mead und Talcott Parsons. Parsons' Beitrag zum Problem „Persönlichkeit und Gesellschaft" ist vor allem deshalb interessant, weil er, im Gegensatz zu Mead, keine einseitige Erklärung der Persönlichkeit aus der jeweiligen soziologischen Umwelt, genauer, aus der Verinnerlichung von gesellschaftlich vorgegebenen Rollen (mit dem biologischen Ich als Unsicherheitsfaktor) versucht, sondern soziales und Persönlichkeitssystem als gleichberechtigte Organisationsmodi von Handlungs-„Elementen" auffaßt.

Eine Betrachtung über „Kultur und Persönlichkeit" leitet über zum Problem sinn- und bedeutungshaltiger Erlebnisbereiche. Freudsche Psychoanalyse, Instinktlehren und Feldtheorie werden als „dynamische" Richtungen kurz gestreift und schließlich in den den Gesichtspunkten „Struktur" und „Werden" gewidmeten Kapiteln der Anschluß an die Ganzheitspsychologie vollzogen.

Die im Anhang abgedruckte Umfrage des Bonner Psychologischen Institutes an amerikanischen Universitäten über deren psychologische Lehrtätigkeit stellt eine wertvolle Bereicherung des Buches dar.

Eine gewisse Schwäche der Arbeit ist in ihrer zweifachen Absicht selbst begründet: Analyse, bzw. Vergleich der beiden Psychologien und Information über die amerikanische Entwicklung. Als bekannt vorausgesetzte Bereiche, wie vor allem die psychotherapeutischen Richtungen, die in den Staaten so blühende Gruppenforschung, auch die verschiedenen Instinkttheorien und die faktorenanalytischen Schulen, deren eingehendere Diskussion im Sinn eines Vergleichs der Tragweite der einzelnen Ansätze doch recht interessant gewesen wäre, werden recht stiefmütterlich behandelt. Trotz dieser Einschränkung kann das Werk für sich in Anspruch nehmen, den bisher umfassendsten deutschen Beitrag zu einer Integration geliefert zu haben.

B. A. Gorbach, Graz

Mathematics in Physics and Engineering. Von J. Irving and N. Mullineux. [Pure and Applied Physics: Volume 6.] Consulting Editor: H. S. W. Massey. New York and London: Academic Press. 1959. $ 11.50.

Band 6 der Sammlung von Monographien über reine und angewandte Physik ist der Mathematik in Physik und Technik gewidmet. Die Verfasser haben es in dankenswerter Weise unternommen, eine Auswahl der wichtigsten mathematischen Methoden zusammenzustellen, die von ihrem Standpunkt aus als wichtig anzu-

sehen sind. Obwohl diese Auswahl natürlich immer von persönlichen Motiven geleitet wird, muß festgestellt werden, daß im vorliegenden Falle eine recht zweckmäßige Auswahl getroffen wurde.

Schon das erste Kapitel, welches eine Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen gibt, ist recht verständlich und enthält dabei alles Wissenswerte. Es wurde nicht nur allein an den Aerodynamiker, den Reaktorphysiker, sondern auch an den Hochfrequenztechniker und Elastomechaniker gedacht.

Der zweite Abschnitt behandelt die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen und bringt hauptsächlich die Methode mit freiem Ansatz, die FROBENIUS' zu verdanken ist. Eine sorgfältige Auswahl von Beispielen mit allen Fällen der charakteristischen Gleichung behandelt das Gebiet ausreichend. Die wichtigsten Differentialgleichungen, wie z. B. die BESSEL-Gleichung, LEGENDRE-Gleichung, kurz alle technisch und physikalisch wichtigen Probleme sind hier zu finden. Auch verschiedene Begriffe, wie die Änderung der abhängigen und unabhängigen Variablen, die Störungstheorie nichtlinearer Differentialgleichungen, sowie die periodischen Lösungen sind nicht vergessen worden. Eine große Anzahl von Beispielen und ausführliche Literaturhinweise beschließen dieses Kapitel.

In Kapitel 3 findet man alle wichtigen Beziehungen über BESSEL- und LEGENDRE-Funktionen zusammengestellt, in Kapitel 4 werden die LAPLACE-Transformation, sowie einige andere Transformationen erörtert.

Der Abschnitt 5 behandelt die Matrizen. Speziell durch die Schöpfung der HEISENBERGschen Quantenmechanik sind die Matrizen für den modernen Atomphysiker von großer Bedeutung. Die einzelnen Typen verschiedener Matrizen, sowie die Methoden der Hauptachsentransformation und anderes mehr wurde übersichtlich zusammengestellt. Infolge des großen Umfanges des Werkes, sieht sich der Referent außerstande, auf alle Details einzugehen und ist gezwungen, nur einiges herauszugreifen. So wäre noch auf die in Kapitel 9 behandelte Residuenmethode hinzuweisen, die ebenfalls in Physik und Technik von außerordentlicher Wichtigkeit ist, und auf die im Kapitel 10 zusammengefaßte Transformationstheorie, welche beispielsweise in der Hochfrequenztechnik starke Anwendung gefunden hat. Eine sehr schöne Sammlung der wichtigsten Formeln und Lehrsätze bildet den Abschluß dieses jedem Physiker und Techniker zu empfehlenden Werkes.

P. URBAN, Graz

Lehrbuch der theoretischen Physik. Von G. Joos †. Zehnte, bearbeitete Auflage. Mit 212 Figuren im Text, XXIII, 842 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1959. Geb. DM 38.—.

Ein Buch, das es wie das vorliegende bereits zu einer zehnten Auflage gebracht hat, hat es wohl nicht nötig, erst empfohlen zu werden. In allen Auflagen ist festzustellen, daß es der Verfasser unternommen hat, die vom Anfang an hervorragende Diktion immer wieder zu verbessern und auf den modernsten Stand zu bringen. Auch die zehnte Auflage, die nunmehr der Öffentlichkeit vorgelegt wird, enthält zahlreiche Neuerungen. In der Elektrizitätslehre ist eine Darstellung der Theorie des Antiferromagnetismus, der in der letzten Auflage nur erwähnt war, sowie ein kurzer Abschnitt über Ferro- und Antiferroelektrizität hinzugekommen. In der Atomphysik werden der Begriff und die Berechnung wellenmechanischer Erwartungswerte ausführlicher behandelt und auch die SCHRÖDINGER-Gleichung wurde auf nichtkonservative Kräfte erweitert. Neu ist außerdem ein Paragraph über die Gleichgewichtseigenschaften von Halbleitergrenzflächen. Außerdem findet man im Kapitel über Kernphysik eine Tabelle der Elementarteilchen, sowie einen kurzen Abriß über Hyperonen. Alles in allem kann wohl gesagt werden, daß dieses Werk dem leider allzufrüh Verstorbenen das schönste Denkmal er-

richtet hat, das einem Physiker geboten werden kann, nämlich das Denkmal im Herzen der Studierenden, denen durch die Herausgabe dieses Werkes der größte Dienst erwiesen wurde. P. URBAN, Graz

Quanten. Ein Lehrbuch der theoretischen Physik. Von W. MACKE. Mit 127 Abb., XII, 495 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1959. Geb. DM 29.50.

Der Verfasser gibt hier Vorlesungen in Buchform heraus, wobei er sich den geänderten Verhältnissen anpaßt und der modernen Physik einen viel größeren Raum einräumt, als dies in den bisherigen Lehrbüchern der Fall ist. Die Aufteilung des Stoffes auf die sechs Bände und der Sinn und Zweck dieses Werkes wurde bereits bei dem zuerst erschienenen Band 2 (Wellen) besprochen (Acta Physica Austriaca **12**, 318).

Dieser Band beginnt mit der Quantelung von Masse, Ladung, Energie, Welle und Phasenraum und stellt dann die neuere Quantentheorie der älteren gegenüber. Die nächsten Abschnitte behandeln die Matrix- und Wellenmechanik, wobei auch auf die gebundenen Zustände, unter anderem das Wasserstoffatom und dessen Feinstruktur, sowie Atome mit größerer Teilchenzahl und die hierfür notwendigen Näherungsverfahren eingegangen wird. Nach einer kurzen Erläuterung der chemischen Bindung folgen Streu- und Stoßprobleme mit den wichtigsten Näherungsmethoden.

Der Abschluß bildet eine allgemeine Darstellung der Quantentheorie im Hilbertraum.

Beim Studium dieses Buches wird man nicht nur mit dem Gebiet der Quantenphysik vertraut, sondern auch mit allen wichtigen Rechenmethoden der modernen Physik, die der Verfasser geschickt in den Stoff hineinverarbeitet hat. Daneben wurde das Hauptaugenmerk auf die Erklärung der Phänomene und der damit verknüpften mathematischen Formeln gelegt und nicht auf die Ableitung der letzteren, so daß das Buch neben seiner eigentlichen Bedeutung als Lehrbuch auch als Nachschlagwerk geeignet ist. Es enthält zahlreiche Aufgaben, die im Anhang gelöst werden. Der Stoff ist sehr übersichtlich dargestellt und das Buch für das Studium der Quantenphysik zu empfehlen. H. ZINGL, Graz

Der Ramaneffekt. Von F. MATOSSI. (Verfahrens- und Messkunde der Naturwissenschaft: Heft 7). Zweite umgearbeitete Auflage. Mit 24 Abb. und 9 Tabellen, IV, 84 S. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1959. Geheftet DM 10.80.

Das 1944 erstmals erschienene schmale Bändchen über den Ramaneffekt ist jetzt in gering erweitertem Umfang neu herausgekommen.

Gesamtanlage und Zielsetzung haben sich, wie ein Blick in das Inhaltsverzeichnis zeigt, so gut wie nicht geändert: Es werden die experimentelle und theoretische Methodik der Ramanspektroskopie, jedoch keine Ergebnisse der Ramanforschung gebracht. Der Text ist, entsprechend einem Abstand von 15 Jahren, teilweise neu geschrieben; die Abbildungen sind, mit einer Ausnahme, von der ersten Auflage übernommen. Neu sind zwei Tabellen am Ende des Buches, die Auskunft geben über Symmetrie, Antisymmetrie oder Entartung und über die Anzahl der Schwingungen zu einem bestimmten Symmetrietypus; die beiden Tabellen ergänzen das Kapitel „Anwendungen des Ramaneffektes".

Die meisten älteren Literaturangaben sind durch neue ersetzt worden, damit ist das Bändchen wieder auf den neuesten Stand gebracht. H. NEUER, Graz

Fundamentals of Electronics. Von F. H. Mitchell. Zweite Auflage. Mit zahlreichen Textabb., XI, 260 S. Reading, Mass.-London: Addision-Wesley Publishing Company, INC. 1959. $ 6.50, £ —/49/—.

Da die Elektronik nun bereits über die Physik hinaus in einem kaum absehbaren Maß an Bedeutung gewinnt, möchte der Verfasser, der selbst eine langjährige Tätigkeit auf diesem Gebiet aufweisen kann, einerseits dem Studenten der Physik die notwendigen Voraussetzungen für ein eingehenderes Studium dieses Gebietes vermitteln; andererseits soll dem Nichtphysiker unter den Naturwissenschaftlern ein Gefühl für Anwendungsmöglichkeiten und Leistungsfähigkeit der Elektronik gegeben werden. Dieses Bemühen kennzeichnet den Aufbau des ganzen Buches und das zweifache Vorhaben des Verfassers kann als durchaus geglückt bezeichnet werden. Dazu tragen sehr wesentlich die an jedes Kapitel sich anschließenden Übungsaufgaben mit teilweise angegebenen Resultaten und ein sehr anschauliches Bildmaterial bei.

Ausgehend von einer klaren Diskussion der Verhältnisse in Gleich- und Wechselstromkreisen sowie der Einführung der komplexen Berechnung derselben werden die Eigenschaften der Dioden, Trioden und Mehrgitterröhren in für die vorliegenden Zwecke hinreichender Form beschrieben. Die Anwendungsmöglichkeiten in den verschiedenen Verstärker- und Senderschaltungen werden angeführt und kurz erläutert. Über die gasgefüllten Röhren wird der Leser zu den spezielleren Röhren wie Elektrometerröhren, Photozellen, Kathodenstrahlröhren und auch Ultrahochfrequenzröhren geführt. Den Abschluß bilden Differenzier- und Integrierschaltungen, sowie ein eigenes Kapitel über die Verwendung von Röhrenvoltmeter und Kathodenstrahloszillographen.

Es liegt nahe, in dieser angegebenen Inhaltsübersicht die Halbleiter zu vermissen. Diesbezügliche Fragen wurden wegen der dabei notwendigen Diskussion über die Grundlagen der Leitung in Festkörpern mit Absicht nicht in das Buch aufgenommen. In diesem Punkt könnte man mit dem Verfasser verschiedener Meinung sein.

Die Aufgabe, die das Buch erfüllen sollte, kann vor allem wegen der klaren Darstellung und der Aufgaben, die ein echtes Vertrautwerden mit dem behandelten Stoff ermöglichen, als glücklich gelöst betrachtet werden. Ein Literaturverzeichnis, welches das Aufsuchen speziellerer Probleme erleichtert, wäre allerdings noch wünschenswert gewesen. N. Pucker, Graz

Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Vol. 30: Fundamental Physics. United Nations, Genf 1958.

Band 30 der Proceedings der zweiten Internationalen Konferenz für die friedlichen Anwendungen der Atomenergie ist der Fundamentalphysik gewidmet und enthält die jüngsten Entwicklungen auf diesem neuesten Zweig der modernen Physik. Zuerst findet man eine systematische Übersicht über die Elementarpartikeltheorie und über die in letzter Zeit gebauten Beschleunigungsapparate. Ein sehr sorgfältiger Bericht von Feynmann und Gell-Mann führt den Leser in die Analyse der „Fremden Partikel" ein. Auch über die Struktur des Kernes bzw. Anwendung des Mehrkörperproblems findet man eine sehr übersichtliche Arbeit von Bogolubov.

Neben diesen theoretischen Artikeln findet man auch eine gute Einführung in die experimentelle Behandlung dieser Vorgänge. Alles Wissenswerte über Bubble Chambers, das neueste Gerät zur Untersuchung der Elementarteilchen, wird in klarer verständlicher Art gebracht und die damit vorgenommenen Untersuchungen sind in ausführlicher Weise referiert. So stellt auch dieser Band eine wahre Fund-

grube, sowohl für den Studierenden als auch für den wissenschaftlich Arbeitenden dar.

P. Urban, Graz

Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Vol. 31: Theoretical and Experimental Aspects of Controlled Nuclear Fusion. United Nations, Genf 1958. $ 15.—.

Der vorliegende 31. Band der Proceedings der zweiten Internationalen Konferenz zur friedlichen Anwendung der Atomenergie befaßt sich mit den theoretischen und experimentellen Aspekten der kontrollierten Kernfusion. Er wurde von namhaften Fachleuten auf diesem neuesten Gebiet der Kernphysik redigiert und es erscheint unmöglich allen Einzelheiten gerecht zu werden. Es sei daher dem Referenten gestattet einiges herauszugreifen. So scheint der Artikel von L. A. Artsimovich über die kontrollierten thermonuklearen Reaktionen in Rußland recht aufschlußreich, ebenso die Ausblicke von Verwendungsmöglichkeiten der Fusion von Edward Teller, und der Bericht von P. C. Thonemann über die Forschungsergebnisse des Vereinigten Königreiches. Unter den theoretischen Abhandlungen befinden sich sehr interessante Untersuchungen über hohe Temperaturen und ihre Behandlung, über die Geschwindigkeitsverteilungen und die Streuung im axialen magnetischen Feld, über die Stabilität des sogenannten Pincheffektes u.a.m. Zahlreiche Abhandlungen über das Plasma, seine Stabilität und seine Struktur wären ebenfalls zu erwähnen.

Den Abschluß bilden einige Abhandlungen über Hydromagnetik und Zyklotronresonanz. Alles in allem kann gesagt werden, daß es sich um eine auf diesem Forschungsgebiet einzigartige Zusammenfassung aller wichtigen Arbeiten handelt, die für die auf diesem Gebiet arbeitenden Physiker als unentbehrlich anzusehen sind.

P. Urban, Graz

Reports on Progress in Physics. Vol. XXII (1959). Herausgegeben von A. C. Stickland. Mit zahlreichen Textabb., IV, 634 S. London: Published by "The Physical Society". 1959. £ —/63/—.

Der alljährlich erscheinende Sammelband Reports on Progress in Physics der englischen physikalischen Gesellschaft ist längst zu einer sehr begehrten Einrichtung geworden. So bietet der nunmehr vorliegende Band 22 (1959) wieder zahlreiche interessante und lehrreiche Sammelberichte. Aus der großen Zahl der Artikel (14) sei auf einige besonders nützliche Berichte hingewiesen. So bringt der erste eine gute Übersicht über die Anwendung der Quantenmechanik auf die theoretische Chemie und wurde von G. G. Hall verfaßt. Nach einer kurzen Einleitung über die Art der Quantenmechanik auf die theoretische Chemie und die verschiedenen Methoden ihrer Anwendung, wird das rechnerische Verfahren zur Lösung der Schrödinger-Gleichung dargestellt. Es wird die Hartreesche Methode als zentrales Verfahren herausgestellt, aber auch genauere Methoden einer kritischen Darstellung unterworfen. Eine Übersicht über die Resultate und ein Vergleich mit dem Experiment, sowie die Verwendung der elektronischen Rechenmaschine bilden den Hauptinhalt dieses Abschnittes.

Infolge der komplizierten Rechnungen sind natürlich Idealisierungen notwendig, die den physikalischen Verhältnissen Rechnung tragen. Man verwendet daher Methoden, die z. B. dem Problem der großen Moleküle speziell angepaßt sind und ähnliches mehr. Auch die Methode, Modelle zu verwenden, hat sich sehr eingebürgert und ist der Verwendung dieser Modelle, sowie den verschiedenen Modellen selbst, ein eigener Abschnitt gewidmet.

Zum Abschluß wird ein Überblick über die gegenwärtige Situation gegeben, sowie ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Der nächste Artikel stammt von J. Pollard und gibt für den Experimentator einen ausgezeichneten Einblick in die Vakuumtechnologie. Hier werden die verschiedenen mechanischen Pumpen, Dampfpumpen und anderes mehr, ausführlich erörtert und ihr Vor- und Nachteil zusammengestellt. Auch die verschiedenen Meßmethoden des Druckes und der Technik sehr kleiner Drucke wird erörtert. Die neueste Literatur ermöglicht dem Leser einzelne Fragen im speziellen weiter zu verfolgen.

Ganz besonders sei auch auf den Artikel von N. Kemmer und Mitarbeiter über die Invarianzeigenschaften in der Theorie der Elementarteilchen hingewiesen, in welchem die besonders in jüngster Zeit so erfolgreich verwendeten Symmetrieeigenschaften sehr verständlich dargestellt werden. Besonders durch die neuen Entdeckungen von Teilchen hat sich die Notwendigkeit einer Anordnung in ein Schema ergeben, welches auf Grund der Symmetrieeigenschaften in klarer Weise möglich wird. Hier spielen vor allem drei Transformationen die Hauptrolle: Die Raum- und Zeitspiegelung, sowie die Ladungskonjugation. Das damit zusammenhängende CPT-Theorem, welches von dem jüngst verstorbenen W. Pauli in Verbindung mit der den Teilchen zugrundegelegten Statistiken des öfteren behandelt wurde, bildet einen der Kernpunkte der neueren Auffassung der Symmetrieeigenschaften. Besonders die didaktische Anordnung dieses, ansonsten eine verständige Darstellung schwer ermöglichenden Gebietes, verdient Erwähnung.

Es ist daher zu hoffen, daß die Herausgabe dieses Bandes, sowohl dem experimentellen als auch dem theoretischen Physiker großen Nutzen bereiten wird.

P. Urban, Graz

Physikalische Kernchemie. Von U. Schindewolf. [Die Wissenschaft: Band 114.] Mit 65 Abbildungen und 13 Tabellen, VIII, 194 S. Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn. 1959. Hln. DM 19.80.

Wieder ein nettes Büchlein dieser interessanten Schriftenreihe. Es enthält die Kernphysik in einfacher Darstellung. Auf schwierigere Probleme, wie z. B. das kollektive Kernmodell oder die Unterscheidung zwischen Neutrinos und Antineutrinos wird hingewiesen oder ganz übergangen. Formeln werden nur dann verwendet, wenn es unbedingt notwendig ist. Dagegen wurden aber viele Zeichnungen verwendet, um den Stoff anschaulicher darzustellen.

In der Beilage ist die bekannte Nuklidkarte vom Oktober 1958, die im Auftrage des Bundesministeriums für Atomenergie und Wasserwirtschaft von der Kernreaktor Bau und Betrieb-GmbH, Karlsruhe, hergestellt wurde.

Das Büchlein ist Physikern in den ersten Semestern zu empfehlen. Vertreter anderer Wissensgebiete, wie Chemiker, Techniker, Mediziner und Biologen finden in dem Buch wahrscheinlich alles, was sie über die Kernphysik wissen möchten oder müssen.

Stoffanordnung und Druck sind lobenswert, das Büchlein ist in jeder Hinsicht vorbildlich und zu empfehlen.

H. Zingl, Graz

Aerodynamik des Flugzeuges. Von H. Schlichting und E. Truckenbrodt. Band 1: Grundlagen der Strömungsmechanik, Aerodynamik des Tragflügels (Teil I). Mit 260 Abbildungen, XV, 455 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 52.50.

Da die älteren deutschsprachigen Werke über die Aerodynamik des Flugzeuges keine neue Bearbeitung erfahren haben, ist den Verfassern dafür zu danken, daß sie sich der Mühe unterzogen haben, den umfangreichen Stoff in einem zweibändigen Werk übersichtlich und auch für den Studierenden leicht faßlich darzustellen. Die ersten Abschnitte des bisher erschienenen ersten Bandes behandeln die Grundlagen der reibungsfreien inkompressiblen und kompressiblen Strömungs-

vorgänge. Im Kapitel „Strömung mit Reibung" wird bereits auf speziell flugtechnische Probleme, unter anderem auf die neuerdings wieder aktuelle Frage der Auftriebssteigerung von Profilen durch Grenzschichtbeeinflussung (Absaugen oder Ausblasen) theoretisch wie auch an Hand von Versuchsergebnissen näher eingegangen. Besonders wertvoll für den Studierenden ist die Aufnahme von Beispielen über Grenzschichtberechnungen an Profilen und über die Ermittlung des Umschlagpunktes laminar/turbulent.

Die letzten Abschnitte des ersten Bandes sind der Theorie des unendlich langen Flügels bei inkompressibler Strömung gewidmet. Nach eingehender Behandlung des Joukowsky-Profiles folgen die Theorie dünner Profile, die Singularitätenmethode für den symmetrisch angeströmten Tropfen und schließlich das Riegels-Verfahren für den angestellten Flügel endlicher Dicke. Auch in diesen Abschnitten werden wiederholt die Ergebnisse der Theorie mit Meßergebnissen verglichen, ohne jedoch den Leser durch eine Fülle von Versuchsmaterial zu verwirren.

Die Theorie des Flügels endlicher Spannweite scheint ebenso wie die Aerodynamik der übrigen Flugzeugteile dem zweiten Band vorbehalten zu sein. Verzichtet wird — wie im Vorwort erwähnt — auf die Behandlung der Flugmechanik im engeren Sinn, das heißt der Bewegungsvorgänge des Flugzeuges unter dem Einfluß der Luftkräfte, auf die Triebwerksaerodynamik (Propeller, Strahltriebwerke und Raketen) wie auch auf die Theorie der instationären Luftkräfte. Es wäre zu wünschen, daß die deutschsprachige Flugzeugliteratur auch in dieser Hinsicht bald auf den gleichen modernen Stand gebracht wird wie die Theorie der stationären Luftkräfte durch das vorliegende Werk, da es dem praktisch tätigen Ingenieur kaum mehr möglich ist, die umfangreiche Zeitschriftenliteratur auf allen Teilgebieten zu verfolgen, bzw. zu überblicken. H. Winter, Graz

Electron Physics and Technology. Von J. Thomson und E. B. Callick. Mit zahlreichen Textabb., XIV, 527 S. London: The English Universities Press Ltd. 1959. Geb. 50 s.

Das vorliegende Buch aus der Reihe der "Physical Science Texts" will eine straffgefaßte Übersicht über das weite Gebiet der Elektronenphysik und damit zusammenhängende Material- und Konstruktionsfragen geben. Es richtet sich nicht nur an den Studenten, der sich über Fragen der Elektronenphysik und ihre Grundlagen einführend informieren will, sondern auch an alle jene Physiker und Techniker, die nicht ausschließlich mit dem vorliegenden Gebiet befaßt sind. Der Stoff ist in sechs Abschnitte gegliedert. Im Abschnitt I werden Erscheinungen im Zusammenhang mit freien und gebundenen Elektronen behandelt. Soweit sie für das Folgende notwendig sind, werden sie klar zusammengefaßt. Die wesentlichen Eigenschaften der üblichen Röhren sind im Abschnitt II angeführt, während der Abschnitt III sich mit jenen Effekten befaßt, die bei den normalen Röhren beim Übergang zu hohen Frequenzen auftreten. Im IV. Abschnitt wird auf die Fragen der Mikrowellenerzeugung eingegangen. Unter anderem finden wir hier das Magnetron, das Klystron oder auch die Wanderwellenröhren behandelt. Röhren für Spezialzwecke, wie Kathodenstrahlröhren, Fernsehröhren und Photozellen finden im V. Abschnitt Beachtung, während der Abschnitt VI auf technologische und konstruktive Fragen eingeht. Hochvakuumerzeugung und Messung, Kathodenmaterialien und andere einschlägige Fragen werden in einem dem Rahmen des Buches entsprechenden Ausmaß behandelt.

Der gebotene Stoff zeichnet sich durch eine gut faßliche Darstellung aus, hat aber auch den Nachteil an manchen Stellen etwas zu wenig in die tiefere Problemstellung einzudringen. Nichtsdestoweniger ist das vorliegende Buch als erste Einführung in die abgehandelten Stoffgebiete durchaus geeignet. N. Pucker, Graz

Visual Problems of Colour. Herausgegeben vom National Laboratory, Teddington. Volume I und II mit 749 Seiten und zahlreichen Textabbildungen. London: Her Majesty's Stationery Office. 1958.

Das vorliegende Buch ist charakterisiert durch die Tatsache, daß es sich hier nicht um ein Werk herkömmlicher Art handelt, sondern um eine Sammlung von Vorträgen, gehalten anläßlich eines Symposiums über Farbensehen vom 23. bis 25. September 1957 am National Physical Laboratory in Teddington, England. In diesen Vorträgen wird eine Fülle von experimentellen und theoretischen Einzelheiten vorgebracht, deren Zweck es war, die mit den modernen Mitteln der Physik und Chemie erfaßbaren Vorgänge mit dem psychischen Erlebnis zu vergleichen.

Schon seit mehr als 150 Jahren führt man mit Th. Young die Fähigkeit des Farbensehens auf das Vorhandensein dreier lichtempfindlicher und verschieden spektralempfindlicher Mechanismen zurück. Die Frage nach der Art dieser drei Mechanismen beschäftigt bis heute die Physiologen, Chemiker und Physiker. Das Bindeglied zwischen den elektromagnetischen Wellen des sichtbaren Spektrums und dem subjektiv als Licht imponierenden Phänomen wird durch die Absorption der elektromagnetischen Wellen in chemisch dafür besonders geeigneten Sehstoffen und durch entsprechende Stoffwechselvorgänge in den Photorezeptoren hergestellt. Die Chemie dieser Sehstoffe ist zum Teil bereits aufgeklärt: Die Aldehyde der beiden Vitamine A_1 und A_2 stellen die prosthetische Gruppe der spezifischen Proteine dar und bilden mit diesen die auf Grund der Proteinspezifität gegebene Vielfalt der *skotopischen* Pigmente mit dem für jedes Pigment charakteristischen Absorptionsspektrum. Der Nachweis zweier *photopischer* Pigmente durch objektive Messung vermittels Feststellung der Absorptionsspektren (540 und 590 mμ) ergibt zusammen mit der Möglichkeit des Vorhandenseins zweier verschiedener Arten von Zäpfchen in der Fovea centralis die Grundlage einer von der trichromatischen Theorie abweichenden Vorstellung des Farbensehens (Rushton). Bei der Dichromasie soll es sich entweder um eine „Unordnung" im Pigmentsystem handeln (Deuteranopie) oder um das Fehlen eines Rezeptors (Protanopie).

Die labilen Sehstoffe erfahren durch Absorption von Energiequanten einen Energiezuwachs, den sie unter Veränderung ihrer Molekülstruktur als elektrische Energie wieder abgeben. Elektroretinographisch ist es wohl gelungen, die skotopische und die photopische Komponente zu trennen, man kann aber innerhalb letzterer keine weitere Unterteilung vornehmen. Neben dem primären Sehprozeß mit all seinen objektiv faßbaren physikalischen und chemischen Veränderungen bleibt das visuelle Erlebnis — den objektiven Analysiermethoden unzugänglich — in geheimnisvolles Dunkel gehüllt. F. Prügger, Graz

Kleines Lehrbuch der Physik ohne Anwendung höherer Mathematik. Von W. H. Westphal. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 283 Textabb., VIII, 283 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 15.80.

Es wird wohl kaum Studierende an einer Hochschule im deutschen Sprachgebiet geben, die, soweit sie Physik als Hilfswissenschaft benötigen, nicht gerne zum „Kleinen Westphal" greifen. Der Verfasser verstand es ausgezeichnet, durch eine glückliche Auswahl des Stoffes eine gründliche Einführung in die Physik zu geben, ohne sich dabei in weniger wichtige Einzelheiten zu verlieren.

Bereits 1952 erfolgte die 2. Auflage, doch brachte sie keine wesentliche Änderung, wenn man von dem notwendig gewordenen Tausch der Symbole für magnetische Feldgrößen (H, B) absieht. In der nun vorliegenden 3. Auflage dagegen sind eine ganze Reihe von Kapiteln neu bearbeitet und besser gefaßt worden; dazugekommen ist ein Kapitel über Elementarteilchen.

Eine Kleinigkeit wäre in einer späteren Auflage meiner Meinung nach abzuändern: Die Definition des Mols. Leider sind heute noch zwei Definitionen dafür gebräuchlich, doch scheint sich in der Physik die dimensionsbehaftete durchzusetzen, während WESTPHAL diejenige als Einheit für die Stoffmenge (Molekülzahl) vorzieht.

J. WAGNER, Graz

Physik und Chemie der Grenzflächen. Von K. L. WOLF. Zweiter Band: Die Phänomene im Besonderen. Mit 180 Abbildungen, IV, 360 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 58.—.

Von dem Buche *"Physik und Chemie der Grenzflächen"* von K. L. WOLF ist nun der zweite Teil „Die Phänomene im Besonderen" erschienen. Dieser Teil soll später durch einen dritten Band über die Anwendungen ergänzt werden.

Der vorliegende Band befaßt sich sehr eingehend mit der Theorie der Grenzflächen und kann als wohlgelungenes Werk bezeichnet werden, das trotz seines handlichen Umfanges (360 Seiten) sehr viele einschlägige Kapitel ausführlich und klar behandelt. Einen großen Raum nehmen dabei die Fragen der Grenzflächen flüssiger Körper ein, wobei wiederum ein großes Kapitel der Gestalt und Überformung dieser Körper gewidmet ist. Ein weiteres Kapitel befaßt sich mit Oberflächenfilmen und ein anderes mit Anreicherungen in Grenzflächen. Schließlich werden noch die mechanischen Eigenschaften gestreift.

Da der vorliegende Band sich mehr mit der Physik als mit der Chemie der Grenzflächen beschäftigt und diese bei den Flüssigkeiten besser theoretisch fundiert ist, als bei den Festkörpern, ist es verständlich, daß im Rahmen dieser Betrachtung die Chemie der Oberflächen fester Körper weniger ausführlich behandelt werden konnte. Trotzdem ist das wichtigste Kapitel daraus — die Adsorption an Festkörper — sehr ausführlich dargestellt.

Das vorliegende Buch stellt also eine mustergültige Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen der sehr heterogenen und seltener behandelten Gebiete der Grenzflächen dar, wobei in diesem Band der Schwerpunkt auf der Physik der Grenzflächen an Flüssigkeiten liegt. Es kann zum Studium dieser Fragen bestens empfohlen werden. Der Praktiker wird vermutlich am geplanten dritten Band besondere Freude haben.

K. TORKAR, Graz

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Institut für Theoretische Physik der Universität. — Druck: Berger & Schwarz, Zwettl, N.-Ö.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. Dempster, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Fortsetzung von der IV. Umschlagseite

Experimental Studies in Re-entry Aerothermodynamics. **Wołczek, O.,** On the Technical Realization of Subgravity and Weightlessness. **Raketenantriebe: Boden, R. H.,** Recent Developments and Designs of the Ion Rocket Engine. **Crane, W. W. T.,** Space Power. **Kantrowitz, A.,** Application of Magnetohydrodynamics to Astronautics. **Kuskevics, G.,** Ion Rocket Efficiency Studies. **Leitmann, G.,** Some Remarks on the Optimum Operation of a Nuclear Rocket. **Lykoudis, P. S.,** and **J. P. Schmitt,** Unsteady Compressible Magnetic Laminar Boundary Layers in Hypersonic Flow. **Meyer, R. X.,** Magnetohydrodynamics and its Application to Propulsion and Re-entry. **Napolitano, L. G.,** and **A. Pozzi,** Compressible Flat Plate Boundary Layer of an Electrically Conducting Fluid in the Presence of Magnetic Fields. **Newgard, J. J.,** and **M. M. Levoy,** Nuclear Rocket Missions and Associated Power Plants. **Perrier, P.,** Etude d'un échangeur de chaleur par convection et rayonnement pour un autopropulseur fissiothermique. **Reingold, L.,** Etude théorique et expérimentale des mélanges propergoliques. Mesure des rendements de combustion. **Sänger, E.,** On the Directing of Intense Photonic Beams by Means of Electron Gas Mirrors. **Thackwell, H. L., Jr.,** The Application of Solid Propellants to Space Flight Vehicles. **Ulam, J.,** Sur deux types de propulseurs électriques. **Waniek, R. W.,** Problems of Magnetic Propulsion of Plasma **Zipkin, M. A.,** and **E. Schnetzer,** Design Compromises in Space Power Systems. **Künstliche Satelliten: Beletsky, V. V.,** Libration of an Artificial Earth Satellite. **Detra, R. W., A. R. Kantrowitz, F. R. Riddell** and **P. H. Rose,** The Drag Brake Manned Satellite System. **Groves, G. V.,** and **M. J. Davies,** Methods of Analysing Observations on Satellites. **Hilton, W. F.,** Re-entry Paths for Manned Satellites. **Knothe, H.,** Some New Methods of Satellite Orbit Calculations and Stability Problems. **Kumar, S. K.,** and **B. R. Rau.,** Design Study of an Earth Satellite Evolving from a Four-Step Solid Propellent Rocket Vehicle. **de Orús, J. J.,** On the Apparent Motion of an Earth's Artificial Satellite. **Paiewonsky, B.,** The Motion of an Orbiting Vehicle Subjected to Continuous Radial Thrust, Including a Study of Planetary Encounters. **Rowell, L. N.,** and **M. C. Smith,** Secular Variation in the Inclination of the Orbit of Earth Satellite (1057 β) and Air Drag. **Tharrats, J.,** Relativity Advances of the Perigee of Artificial Earth Satellites. **Raumfahrtbiologie und -medizin: Andersen, C. E.,** The Corpuscular Rays from the Sun. **Beckh, H. J. von,** Multi-Directional-*G* Protection During Experimental Sled Runs. **Davies, R. W.,** and **M. G. Comuntzis,** The Sterilization of Space Vehicles to Prevent Extraterrestrial Biological Contamination. **Davies, I.,** and **J. D. Fulton,** The Reactions of Terrestrial Microorganisms to Simulated Martian Conditions. **Eugster, J.,** and **D. G. Simons,** Results of Experiments on the Biological Effects of Cosmic Radiation on Seeds of Hordeum (Gold Barley) Bonus 01518/B 19 (Gustafsson), with Special Consideration of Heavy Primaries Effects. **Flickinger, D.,** Personnel Selection and Training for Space Flight. **Graybiel, A., J. H. McNinch** and **R. H. Holmes,** Observations on Small Primates in Space Flight. **Haviland, R. P.,** The Biological Satellite. **Steinkamp, G. R., W. R. Hawkins** and **G. T. Hauty,** Experiments in Space Cabin Simulators. **Strughold, H.,** The Human Eye in Space (Physiologic Aspect). **Vaeth, J. G.,** Prediction of Man's Performance in Space Using Flight Simulators and Balloon-Borne Systems. **Violette, F. H., Boiteau** et **S. Bernard,** Les limites de la survie en cabine étanche au cours des voyages interplanétaires.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Soeben erschien:

X^th International Astronautical Congress. X. Internationaler Astronautischer Kongreß. X^e Congrès International d'Astronautique. London 1959. Proceedings — Bericht — Comptes rendus.

Editorial Board — Herausgegeben von — Comité des Rédacteurs **W. v. Braun, A. Eula, B. Fraeijs de Veubeke, F. Hecht, W. B. Klemperer, J. M. J. Kooy, F. I. Ordway III, E. Sänger, K. Schütte, L. I. Sedov, L. R. Shepherd, J. Stemmer.** Editor-in-Chief — Schriftleitung — Rédacteur on chef: **F. Hecht.** Mit 464 Figuren. XIII, 946 Seiten. Gr.-8°, 1960.

Ganzleinen S 1380.—, DM 230.—, sfr. 235.50, $ 54.75

Vorzugspreis für Mitglieder der an die IAF angeschlossenen Gesellschaften und für Bezieher der „Astronautica Acta":

Ganzleinen S 1104.—, DM 184.—, sfr. 188.40, $ 43.80

Inhaltsverzeichnis: **Astronautik, Allgemeines: Dryden, H. L.,** Global Aspects of the Exploration of Space. **Katz, A. H.,** Observation Satelütes: Problems. Possibilities and Prospects. **Erforschung der hohen Atmosphäre: Hutchinson, H. P.,** and **P. R. Arendt,** Ionospheric Scintillations of Satellite Signals. **Istomin, V. G.,** Some Results of the Measurement of the Mass Spectrum of Positive Ions by the 3rd Artificial Earth Satellite. **King-Hele, D. G.,** Determination of Air Density and the Earth's Gravitational Field from the Orbits of Artificial Satellites. **Krassovsky, V. I., I. S. Shklovsky, G. I. Galperin** and **E. M. Svetlitsky,** On Fast Corpuscles of the Upper Atmosphere. **Paetzold, H. K.,** and **H. Zschörner,** The Fluctuation of the Accelerations of Satellites and the Changing of the Upper Atmospheric Conditions. **Shklovsky, I. S.,** and **V. G. Kurt,** Determination of Atmospheric Density at an Altitude of 430 km by the Sodium Vapour Diffusion Method. **Raumfahrtphysik, Astrophysik: Boneff, N.,** Sur le danger météoritique en astronautique (2^me partie). **Davies, M. E.,** Lunar Exploration by Photography from a Space Vehicle. **Dubin, M.,** The Meteoritic Environment from Direct Measurements. **Gold, L.,** Gravitational-Magnetic Origin of Sunspots and Related Phenomena. **Gröbner, W.,** and **F. Cap.,** The Three-Body Problem Earth-Moon-Spaceship. **Herrick, S., L. G. Walters** and **C. G. Hilton,** Differential Expressions for Low-Eccentricity Geocentric Orbits **Newton, R. R.,** Tracking Objects Within the Solar System Using Only Doppler Measurements. **Ostinelli, E.,** Funzioni del rapporto di massa in campo relativistico. Formulazione generale per qualunque velocità di trasferimento e di getto. **Roglá Altet, V.,** Voyage aux étoiles. Etude de la fusée d'après le principe de relativité. **Schmidt, Ingeborg,** The "Green" Areas of Mars and Color Vision. **Singer, S. F.,** Present Status of the Earth's Radiation Belt. **Subotowicz, M.,** Theorie der relativistischen *n*-Stufenrakete. **Sun, F.-T.,** Launching Conditions and the Geometry of Orbits in a Central Gravity Field. **Woodbridge, D. D.,** and **W. N. Arnquist,** Measurement of Jupiter Re-entry Radiation. **Raumfahrttechnik: Bjork, R. L.,** Effects of a Meteoroid Impact on Steel and Aluminium in Space. **Boni, A.,** Telecomunicazioni spaziali e caratteristiche dei loro canali. **Callede, G.,** Les aériens à grand gain. **Chapman, D. R.,** On the Corridor and Associated Trajectory Accuracy for Entry of Manned Spacecraft into Planetary Atmospheres. **Connors, T. L., W. K. Huggett** and **A. C. Lawson, Jr.,** Line-of-Sight Criteria for Interplanetary Navigation. **Cremona, C. E.,** e **D. Cunsolo,** La sostentazione getto-orbitale nei trasporti ultraveloci. **Cross, C. A.,** A Practical Investigation of Spaceship Control Problems. **Gunkel, R. J., D. N. Lascody** and **D. S. Merrilees,** Impulsive Midcourse Correction of an Interplanetary Transfer. **Handel, P. F. von,** and **F. Hoehndorf,** Accuracy Limits in Electronic Tracking of Space Vehicles. **Kooy, J. M. J.,** On the Numerical Computation of Free Trajectories of a Lunar Space Vehicle. **Miele, A.,** On the Flight Path of a Hypervelocity Glider Boosted by Rockets. **Partel, G.,** and **A. Angeloni,** Rocket Postal Service. Part II: Intercontinental Connection. **Plimmer, R. N. A.,** Fuel Requirements for Inter-Orbital Transfer of a Rocket. **Rosen, M. W.,** and **F. C. Schwenk,** A Rocket for Manned Lunar Exploration. **Ruppe, H. O.,** Minimum Energy Requirements for Space Travel. **Scala, S. M.,** A Study of Hypersonic Ablation. **Sinra, I.,** Interplanetary Navigation. **Stearns, E. V.,** Interplanetary Homing. **Warren, W. R.,** Laboratory

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung